

# Classements

## Poule de 4



### VICTOIRE À 2 POINTS

On appelle **A**, **B**, **C** et **D** les 4 équipes d'une poule.

#### Première journée (A contre B et C contre D)

Quand les deux matchs ont été joués, il y a 9 classements possibles puisque les seules variables aléatoires indépendantes sont les points marqués par **A** (ou **B**) d'une part et **C** (ou **D**) d'autre part :

Tableau  $J_1$

<b>A</b>	2	2	2	1	1	1	0	0	0
<b>B</b>	0	0	0	1	1	1	2	2	2
<b>C</b>	2	1	0	2	1	0	2	1	0
<b>D</b>	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Chaque **colonne** est appelée un **classement**. On dit que deux **classements** sont **équivalents** quand ils sont identiques par permutation. Il s'agit d'une véritable relation d'équivalence au sens mathématique du terme (réflexive, symétrique et transitive).

Ces 9 classements possibles se regroupent dans trois classes d'équivalence désignées par un nombre de 4 chiffres formé avec les points dans l'ordre décroissant : la classe 2200 (4 éléments), la classe 2110 (également 4 éléments) et la classe 1111 (un seul élément).

#### Deuxième journée (A contre C et B contre D),

Les 9 possibilités de points marqués par chaque équipe sont données dans le tableau ci-dessous.

Tableau  $J_2$

<b>A</b>	2	2	2	1	1	1	0	0	0
<b>B</b>	2	1	0	2	1	0	2	1	0
<b>C</b>	0	0	0	1	1	1	2	2	2
<b>D</b>	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Pour construire le tableau des points possibles après la deuxième journée, il suffit d'ajouter à chaque classement du tableau  $J_1$  tous les classements du tableau  $J_2$ . Un tableur n'est pas inutile mais il faut quand même un peu de patience. On obtient ainsi un tableau à 81 colonnes (voir fichier Excel **Tableaux**). Nous appelons  $T_{81}$  ce tableau. Il n'est pas nécessaire de le voir pour comprendre la suite des calculs.

## Troisième journée (A contre D et B contre C)

Pour obtenir les classements après la troisième journée de compétition, il faut ajouter chaque classement du tableau  $T_{81}$  à tous les classements du tableau  $J_3$  ci-dessous.

A	2	1	0	2	1	0	2	1	0
B	2	2	2	1	1	1	0	0	0
C	0	0	0	1	1	1	2	2	2
D	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Là encore, il suffit d'un peu de temps. On obtient ainsi un tableau à 729 colonnes ( $T_{729}$ ) qui est visible dans le fichier **Tableaux**.

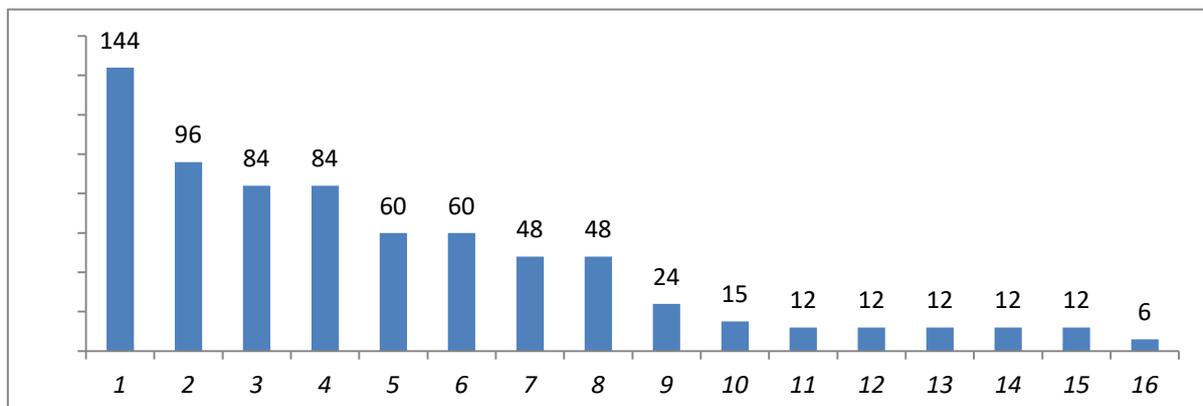
Pour regrouper les classements équivalents nous trions le tableau  $T_{729}$  en calculant pour chaque classement le produit  $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)(p_4+1)$ . Le « +1 » permet d'éviter les produits nuls. On n'a aucune certitude mathématique que ce critère de tri soit suffisant. On constate simplement a posteriori qu'il l'est.

On observe qu'il y a 16 classements non équivalents : 6420, 6411, 6330, 6321, 6222, 5520, 5511, 5430, 5421, 5331, 5322, 4440, 4431, 4422, 4332.

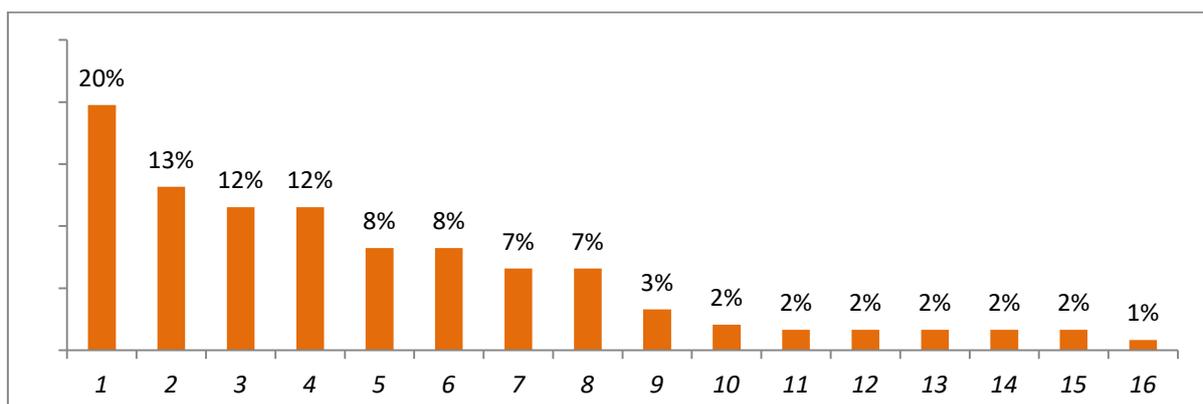
On note le nombre de fois où ils apparaissent dans  $T_{729}$ .

Voici les 16 classements et leurs occurrences. Ils ont été classés par occurrence décroissante, puis par nombre de points décroissant pour le premier, puis le second.

Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Premier	4	5	5	4	5	4	6	5	6	3	6	6	6	5	4	5
Deuxième	3	4	3	4	3	4	3	4	4	3	4	3	2	5	4	5
Troisième	3	2	2	3	3	2	2	3	2	3	1	3	2	2	4	1
Dernier	2	1	2	1	1	2	1	0	0	3	1	0	2	0	0	1
Occurrences	144	96	84	84	60	60	48	48	24	15	12	12	12	12	12	6



Le total des occurrences est bien égal à 729. En pourcentage, l'histogramme est le suivant.



## Équipes qualifiées pour la phase suivante

Une règle n'a jamais varié dans le temps : **les deux premiers de chaque poule sont toujours qualifiés** pour le tour suivant. Selon le nombre total de poules dans la première phase, **on ajoute parfois les meilleurs 3<sup>èmes</sup>**.

Nous examinons maintenant le sort d'une équipe selon le nombre de points recueillis à la fin de la phase de poule.

### 1) Une équipe a 6 points

Numéro	7	9	11	12	13
Premier	6	6	6	6	6
Deuxième	3	4	4	3	2
Troisième	2	2	1	3	2
Dernier	1	0	1	0	2

Sans surprise, elle est 1<sup>ère</sup> puisqu'elle a gagné tous ses matchs et est donc **qualifiée**.

### 2) Une équipe a 5 points

Numéro	2	3	5	8	14	16
Premier	5	5	5	5	5	5
Deuxième	4	3	3	4	5	5
Troisième	2	2	3	3	2	1
Dernier	1	2	1	0	0	1

Sans surprise également, avec deux victoires et un nul, l'équipe est 1<sup>ère</sup> de son groupe, ou 2<sup>ème</sup> dans les classements 14 et 16. Elle est donc **qualifiée**.

### 3) Une équipe a 4 points

Numéro	1	2	4	6	8	9	11	15
Premier	4	5	4	4	5	6	6	4
Deuxième	3	4	4	4	4	4	4	4
Troisième	3	2	3	2	3	2	1	4
Dernier	2	1	1	2	0	0	1	0

Elle est 1<sup>ère</sup> ou 2<sup>ème</sup> (et **qualifiée**) sauf pour le classement 15 où elle peut être 3<sup>ème</sup>.

Dans le cas où les meilleurs 3<sup>èmes</sup> sont qualifiés, l'équipe est meilleure 3<sup>ème</sup> puisque qu'aucun autre classement ne fournit un 3<sup>ème</sup> avec 4 points. Elle est alors **qualifiée**.

### 4) Une équipe a 3 points

Numéro	1	3	4	5	7	8	10	12
Premier	4	5	4	5	6	5	3	6
Deuxième	3	3	4	3	3	4	3	3
Troisième	3	2	3	3	2	3	3	3
Dernier	2	2	1	1	1	0	3	0

Elle a autant de « chances » d'être **qualifiée** (cases vertes) que d'être **éliminée** (cases orange et rouge).

Quand les meilleurs 3<sup>èmes</sup> sont qualifiés, le sort d'une équipe est lié au nombre de poules et au nombre de qualifiés. On ne rentrera pas dans ces détails.

### 5) Une équipe a 2 points

Numéro	1	2	3	6	7	9	13	14
Premier	4	5	5	4	6	6	6	5
Deuxième	3	4	3	4	3	4	2	5
Troisième	3	2	2	2	2	2	2	2
Dernier	2	1	2	2	1	0	2	0

Elle est **qualifiée** uniquement dans le classement 13.

Comme précédemment, quand les meilleurs 3<sup>èmes</sup> sont qualifiés, le sort d'une équipe est lié au nombre de poules et au nombre de qualifiés.

### 6) Une équipe a 1 point

Numéro	2	4	5	7	11	16
Premier	5	4	5	6	6	5
Deuxième	4	4	3	3	4	5
Troisième	2	3	3	2	1	1
Dernier	1	1	1	1	1	1
Occurrences	96	84	60	48	12	6

Une équipe qui n'a qu'un point peut quand même être 3<sup>ème</sup> (classements 11 et 16). Mais dans les cas historiques de 6 poules de 4 avec qualification des 4 meilleurs 3<sup>èmes</sup>, il se trouvera toujours 4 ou 5 poules dans lesquelles le 3<sup>ème</sup> a au moins 2 points.

Une équipe qui n'a qu'un point est donc **toujours éliminée**.

### 7) une équipe a 0 point

Bonne dernière, elle est toujours **éliminée**.

Suite page suivante

## VICTOIRE À 3 POINTS

Pas beaucoup de changement par rapport aux calculs précédents.

Les tableaux  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$  sont les suivants (les 2 ont été remplacés par des 3).

<b>Tableau <math>J_1</math></b>	<b>A</b>	3	3	3	1	1	1	0	0	0
	<b>B</b>	0	0	0	1	1	1	3	3	3
	<b>C</b>	3	1	0	3	1	0	3	1	0
	<b>D</b>	0	1	3	0	1	3	0	1	3

<b>Tableau <math>J_2</math></b>	<b>A</b>	3	3	3	1	1	1	0	0	0
	<b>B</b>	3	1	0	3	1	0	3	1	0
	<b>C</b>	0	0	0	1	1	1	3	3	3
	<b>D</b>	0	1	3	0	1	3	0	1	3

<b>Tableau <math>J_3</math></b>	<b>A</b>	3	1	0	3	1	0	3	1	0
	<b>B</b>	3	3	3	1	1	1	0	0	0
	<b>C</b>	0	0	0	1	1	1	3	3	3
	<b>D</b>	0	1	3	0	1	3	0	1	3

Le tableau  $T_{729}$  obtenu après les trois journées de compétition est évidemment différent du précédent (voir fichier **Tableaux**). Et il n'y a pas de correspondance biunivoque entre le nombre de points marqués avec une victoire à 2 points ou à 3 points, sauf pour les deux premières et les deux dernières lignes du tableau ci-dessous.

Victoire à 2 points	Gagné	Nul	Perdu	Victoire à 3 points
6	3	0	0	9
5	2	1	0	7
4	2	0	1	6
	1	2	0	5
3	1	1	1	4
	0	3	0	3
2	1	0	2	
	0	2	1	2
1	0	1	2	1
0	0	0	3	0

Pour regrouper les classements équivalents dans le tableau  $T_{729}$ , nous effectuons le même tri que précédemment en utilisant le produit  $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)(p_4+1)$ . On constate que cette procédure ne suffit plus car des classements non équivalents peuvent avoir le même produit. On constate, toujours sans justification, qu'il faut ajouter deux critères de tri, le nombre de points du premier du classement et la somme des points des 4 équipes.

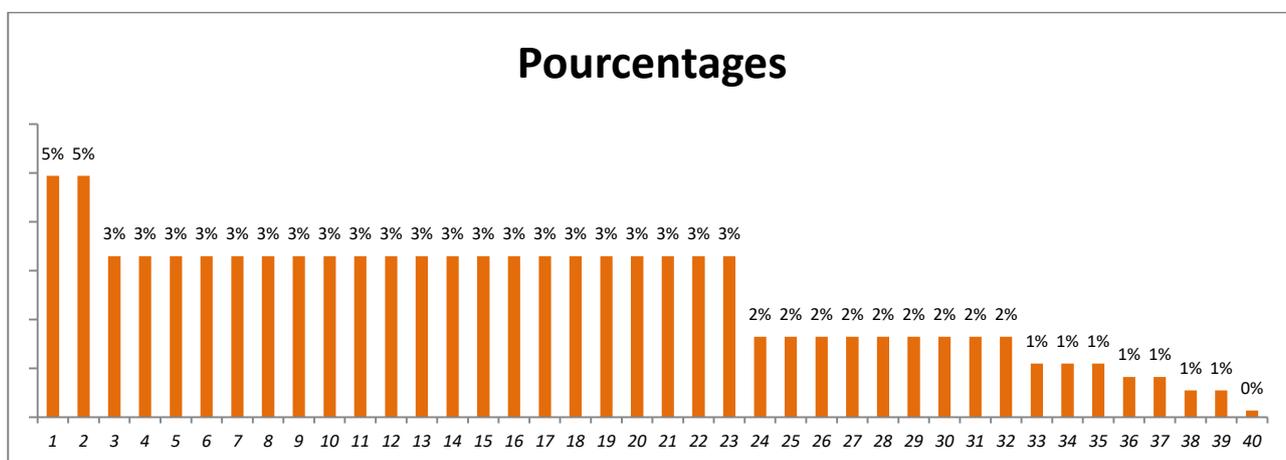
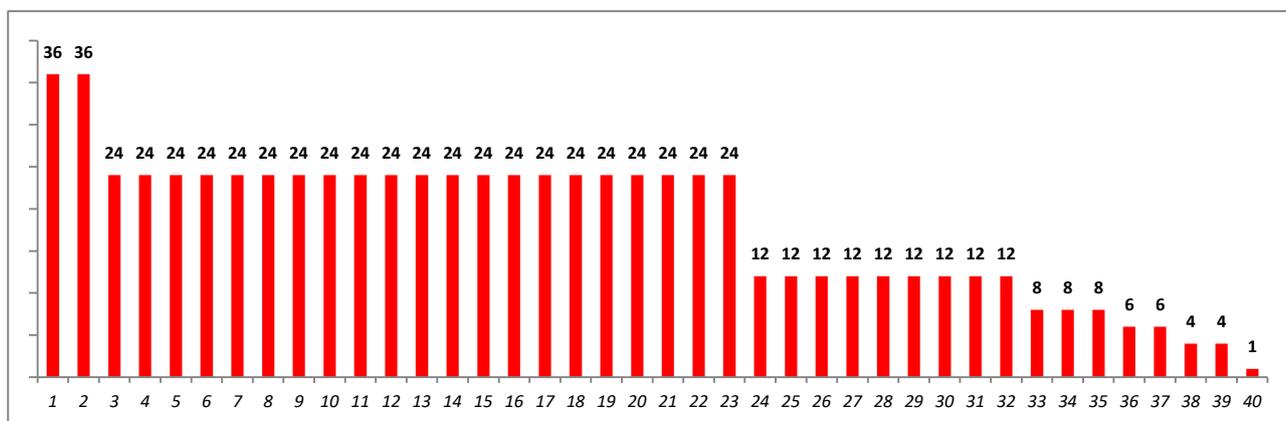
On dénombre ainsi **40 classements non équivalents possibles**. Ils ont été classés par occurrence décroissante, puis par nombre de points décroissant pour le premier, puis le second, puis le troisième et enfin le dernier.

Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Premier	7	6	9	9	9	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	5	5	5	5
Deuxième	4	4	6	4	4	6	6	6	5	5	5	4	4	4	4	6	6	5	4	5	4	4	4
Troisième	4	4	3	3	2	4	3	2	4	3	2	3	3	3	2	4	3	4	4	4	4	4	3
Dernier	1	3	0	1	1	0	1	1	0	1	1	3	2	1	2	1	3	1	2	1	3	2	2
Occurrences	36		24																				

Numéro	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Premier	9	9	7	7	6	5	5	5	5	9	6	4	7	4	9	5	3
Deuxième	6	4	7	3	5	5	5	5	3	3	6	4	7	4	2	5	3
Troisième	1	4	3	2	2	3	3	2	3	3	6	4	1	4	2	5	3
Dernier	1	0	0	2	2	2	1	2	2	3	0	3	1	4	2	0	3
Occurrences	12									8			6		4		1

Le nombre de classements non équivalents est passé de 16 à 40, c'est-à-dire qu'il a été multiplié exactement par 5/2. Ce n'est certainement pas un hasard mais il serait fastidieux de le vérifier.

Les histogrammes ci-dessous montrent le nombre d'occurrences et le pourcentage de chaque classement dans  $T_{729}$ .



## Équipes qualifiées pour la phase suivante

### 1) Une équipe a 9 ou 7 points

En raison de la correspondance établie précédemment, ces équipes sont **qualifiées** puisqu'elles auraient eu 6 et 5 points avec une victoire à 2 points.

### 2) Une équipe a 6 points

Elle aurait eu 4 points dans le cas d'une victoire à 2 points et le classement 34 ci-dessous est l'équivalent du classement 13 précédent.

Numéro	2	3	6	7	8	16	17	18	19	24	28	34
Premier	6	9	7	7	7	6	6	6	6	9	6	6
Deuxième	4	6	6	6	6	6	6	5	4	6	5	6
Troisième	4	3	4	3	2	4	3	4	4	1	2	6
Dernier	3	0	0	1	1	1	3	1	2	1	2	0

Elle est 1<sup>ère</sup> ou 2<sup>ème</sup> sauf pour le classement 34 où elle peut être 3<sup>ème</sup>. Dans ce cas, elle sera **éliminée**, sauf si la formule qualifie les meilleurs 3<sup>èmes</sup>. Dans ce cas, elle est meilleure 3<sup>ème</sup> puisque cette situation se produit pour un seul classement et elle est **qualifiée**.

### 3) Une équipe a 5 points

Comme précédemment, elle en aurait 4 dans le cas d'une victoire à 2 points. Le classement 39 ci-dessous est l'équivalent du classement 13 précédent.

Numéro	9	10	11	18	20	21	22	23	28	29	30	31	32	39
Premier	7	7	7	6	5	5	5	5	6	5	5	5	5	5
Deuxième	5	5	5	5	5	4	4	4	5	5	5	5	3	5
Troisième	4	3	2	4	4	4	4	3	2	3	3	2	3	5
Dernier	0	1	1	1	1	3	2	2	2	2	1	2	2	0

La situation est identique à la précédente.

### 4) Une équipe a 4 points

Elle en aurait 3 avec une victoire à 2 points.

Numéro	1	2	4	5	6	9	12	13	14	15	16	18	19	20	21	22	23	25	35	37
Premier	7	6	9	9	7	7	7	7	7	7	6	6	6	5	5	5	5	9	4	4
Deuxième	4	4	4	4	6	5	4	4	4	4	6	5	4	5	4	4	4	4	4	4
Troisième	4	4	3	2	4	4	3	3	3	2	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4
Dernier	1	3	1	1	0	0	3	2	1	2	1	1	2	1	3	2	2	0	3	4

Quand elle est 1<sup>ère</sup> (35 ou 37 seulement) ou 2<sup>ème</sup>, elle est évidemment **qualifiée**.

Comme précédemment, nous ne dirons rien sur la possibilité d'être dans les meilleurs 3<sup>èmes</sup> avec 4 points.

4<sup>ème</sup> avec 4 points dans le classement 37, l'équipe est **éliminée**.

### 5) Une équipe a 3 points

Elle en aurait 3 ou 2 avec une victoire à 2 points.

Numéro	2	3	4	7	10	12	13	14	17	21	23	26	27	29	30	32	33	35	40
Premier	6	9	9	7	7	7	7	7	6	5	5	7	7	5	5	5	9	4	3
Deuxième	4	6	4	6	5	4	4	4	6	4	4	7	3	5	5	3	3	4	3
Troisième	4	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	2	3	3	3	3	4	3
Dernier	3	0	1	1	1	3	2	1	3	3	2	0	2	2	1	2	3	3	3

Elle est 1<sup>ère</sup> pour le classement 40, ou 2<sup>ème</sup> pour les classements 27, 32, 33 et 40. Dans ces cas, elle est **qualifiée**.

Comme pour les équipes ayant 4 points, nous ne diront rien sur les chances de qualification d'une équipe étant 3<sup>ème</sup> avec 3 points.

### 6) Une équipe a 2 points ou 1 point

Comme dans le cas de la victoire à 2 points, elle est **éliminée**.

### 7) une équipe a 0 point

Bonne dernière, elle est toujours **éliminée**.

## CONCLUSIONS

1) Une équipe qui gagne ses trois matchs ou qui en gagne deux et fait un match nul est toujours qualifiée.

2) Une équipe qui gagne deux matchs et en perd un est toujours qualifiée quand les meilleurs troisièmes sont qualifiés. Elle peut être éliminée quand seuls les deux premiers sont qualifiés.

Même chose quand une équipe gagne un seul match et fait deux matchs nuls.

3) Avec une victoire et un nul, une équipe peut être qualifiée ou éliminée.