# GAMMES CHROMATIQUES

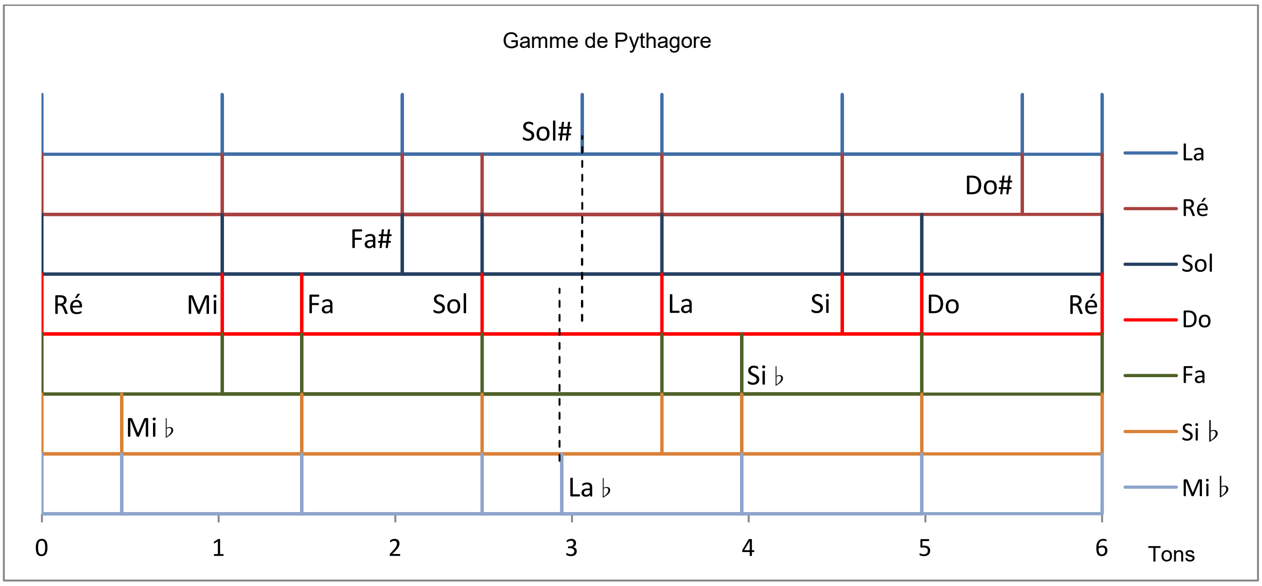
**Résumé**

Après un rappel de la construction de la gamme diatonique et de ses différentes tonalités, nous utilisons le cycle des quintes pour construire une gamme chromatique quelconque. Nous faisons un inventaire aussi complet que possible des tempéraments historiques, y compris les tempéraments mésotoniques et le tempérament (récent) de Cordier.

## Définition

**Une gamme chromatique est un ensemble de 12 notes séparées d'un intervalle d'environ un demi Ton.**

Nous avons vu dans « Gammes diatoniques » et dans « Tonalités » que la réduction dans l'octave de 7 notes formant des intervalles de quintes (justes ou non) produisait les 7 notes de la gamme diatonique, et qu'une translation de cet ensemble permettait d'obtenir les tonalités (schéma ci-dessous).




On constate que nous générons ainsi un ensemble de 13 notes séparées d'environ un demi Ton, sauf le Sol# et le La ♭ dont l'écart est le comma (qui dépend de la valeur de la quinte utilisée pour construire la gamme).

Si on confond ces deux notes, il reste 12 notes (13 avec le Ré à l'octave) séparées par des intervalles voisins du demi-Ton, et qui forment, **par définition**, une gamme chromatique.

Réciproquement, on peut également définir **une gamme chromatique comme étant la réduction dans l'octave de base d'un ensemble de 13 notes séparées par un intervalle <u>voisin</u> d'une quinte juste, les deux notes extrêmes étant distantes <u>exactement</u> de 7 octaves.**

## Gamme chromatique de Pythagore

Si on utilise la quinte juste Qj = 3,510 Tons pour construire les notes ci-dessus et que l'on supprime le Sol#, on obtient la gamme chromatique de Pythagore dans laquelle toutes les quintes sont justes, évidemment, sauf la quinte Do# - La ♭ appelée quinte du loup (les explications trouvées sur Internet pour justifier cette appellation ne me satisfont pas). Elle vaut $Q\ell$ = 7 – 11 Qj = 3,392 Tons. L'écart entre la quinte du loup et la quinte juste est le comma de Pythagore (déjà rencontré et défini dans le chapitre « Gammes diatoniques »).

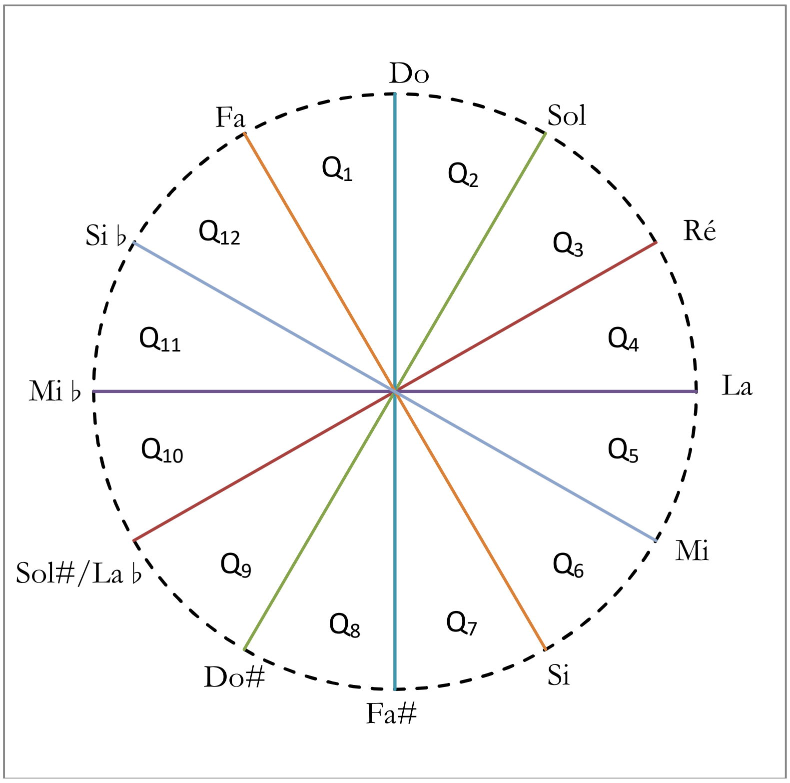
### Technique classique de construction d'une gamme chromatique

Les 12 intervalles de quinte sont très fréquemment représentés sur un cercle puisque les deux notes extrêmes, distantes de 7 octaves, sont considérées comme équivalentes. L'ensemble est appelé **cycle des quintes**.

Dans les documents que j'ai consultés, le Do est habituellement placé en haut du schéma. Une tonalité diatonique est constituée des notes situées d'un côté de l'un des 6 diamètres tracés.

Les tonalités (Ré♭- Do#), (Sol♭- Fa#) et (Do♭- Si), sont musicalement confondues.

Les quintes sont numérotées à partir de (Fa-Do) qui est la première quinte de la tonalité de Do majeur. Par conséquent, les notes Sol# et La♭ sont confondues.




Dans le cas général, toutes les quintes sont a priori différentes les unes des autres mais elles doivent respecter la relation :

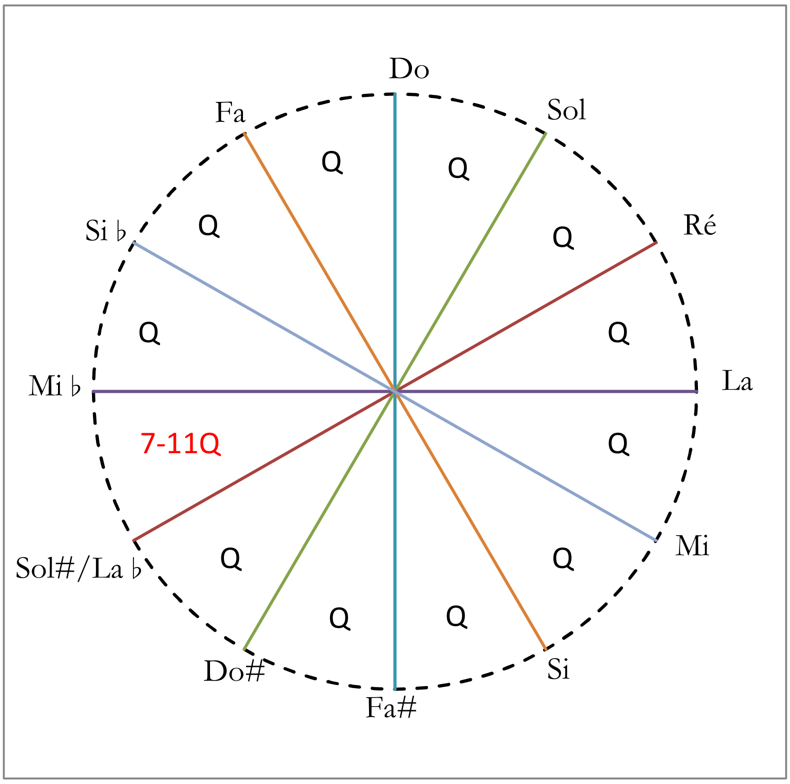
$$\sum_{k=1}^{12} Q_k = 7$$

### Tempéraments mésotoniques

Le préfixe « méso » voulant dire « moyen », les tempéraments chromatiques mésotoniques sont construits avec des quintes égales Q (« proches » de la quinte juste), sauf la quinte $Q_{10}$ qui vaut 7 – 11Q.

D'un point de vue historique, le tempérament mésotonique a été construit pour obtenir un maximum de tierces justes. Pour cela, il suffit de choisir Q = Qj – Cs/4 (cette valeur a déjà été rencontrée dans la gamme diatonique à quintes égales et tierces justes).

Puis, afin de ne pas trop fausser les quintes, l'histoire a retenu des quintes de la forme Q = Qj – Cs/n où n peut aller jusqu'à 12. Dans ce dernier cas, on obtient Q = 3,501 Tons) une valeur très proche de la quinte tempérée (3,5 Tons).



En fin de chapitre, nous étudions la justesse des quintes et des tierces dans le cas général où Q peut varier de façon continue.

### Tempéraments historiques

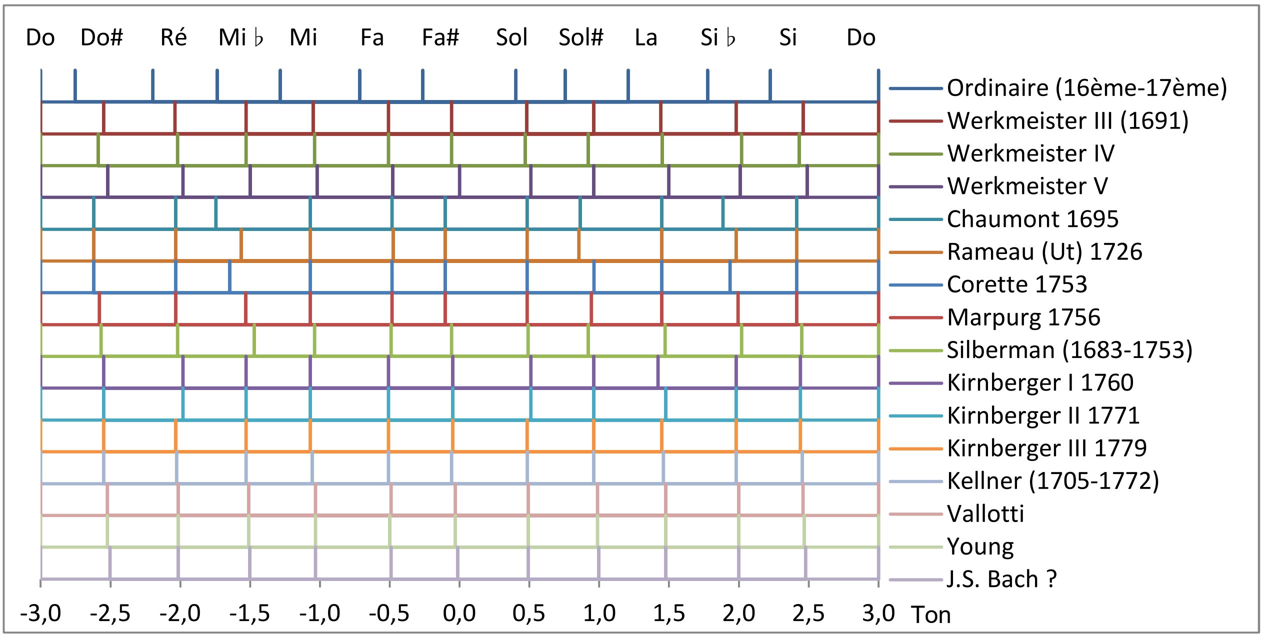
Il y aurait beaucoup à dire sur l'histoire des tempéraments irréguliers et j'ai trouvé sur Internet deux sites relativement bien documentés :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Tempérament_inégal

et http://organ-au-logis.pagesperso-orange.fr/Pages/Temperam.htm#Werck4

Je me contente sur la figure ci-dessous d'indiquer la position des notes dans les tempéraments que j'ai pu calculer en utilisant les indications concernant les quintes utilisées. Les amateurs de musique trouveront sur les sites les justifications musicales qu'il serait trop long de rapporter ici.

Dans la mesure des informations disponibles, j'ai classé ces tempéraments dans l'ordre chronologique. On constate que les plus récents sont relativement proches du tempérament égal.




### Gamme chromatique tempérée

Aujourd'hui, la plus connue des gammes chromatiques est évidemment la gamme chromatique tempérée dans laquelle toutes les quintes valent 3,5 Tons. Les intervalles entre deux notes successives sont donc tous égaux à un demi Ton.

Après avoir été critiquée par tous les musiciens du 18ème siècle (y compris par Bach lui-même), elle s'est imposée progressivement car elle est la seule à permettre toutes les transpositions et les évasions harmoniques sans provoquer de graves dissonances.

Mais n'oublions pas que dans la gamme chromatique tempérée, toutes les quintes sont fausses (3,50 Tons au lieu de 3,51 Tons) et toutes les tierces sont fausses (2 Tons au lieu de 1,93 Tons).

### Gamme de Holder-Mercator

L'Anglais William Holder (1616 – 1698) était un théoricien de la musique et je pense, sans en avoir trouvé la preuve formelle, que c'est à lui que l'on doit « l'invention » de cette gamme.

Nicolaus Mercator (1620 – 1687), aussi connu sous son nom allemand Niklaus Kauffman, est un mathématicien surtout connu pour ses travaux sur les logarithmes. Il ne faut pas le confondre avec Gerardus Mercator (1512 – 1594), créateur de la projection Mercator bien connue des cartographes.

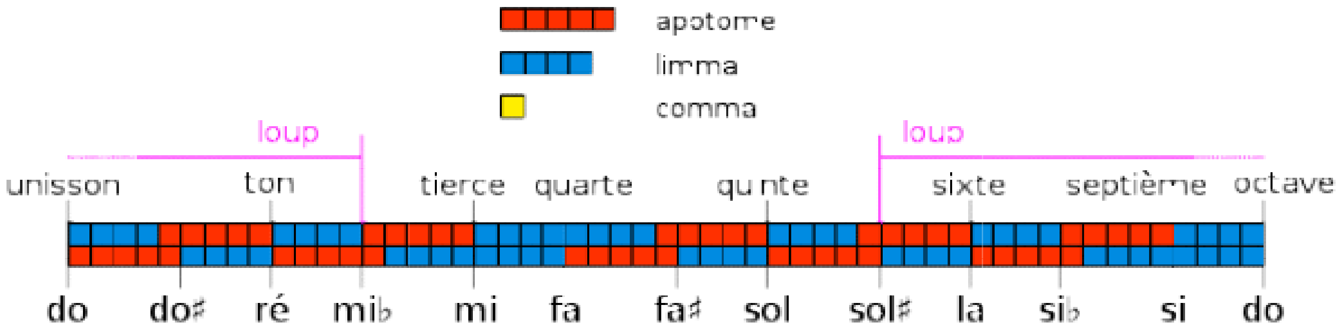
Nicolaus Mercator aurait retrouvé, indépendamment de Holder, le principe de cette gamme et introduit le comma de Mercator (que nous appellerons cependant comma de Holder).

Historiquement, cette gamme n'est pas construite à partir du cycle des quintes mais à partir d'une approximation de la quinte juste par une fraction rationnelle, Qh = 31/53 = 3,509 Tons, très proche de la quinte juste Qj = 3,510 Tons.

On peut cependant la définir à partir du cycle des quintes en prenant toutes les quintes égales à Qh sauf $Q_{10}$ qui vaut 7-11Qh = 3,396 Tons (très proche de la quinte du loup).

Cette gamme est assez connue grâce à sa proximité avec la gamme chromatique de Pythagore. Elle a d'ailleurs été longtemps enseignée comme étant **LA** gamme.

L'intérêt pédagogique de la gamme de Holder-Mercator est évident car la division arbitraire de l'octave en 53 intervalles égaux est plus facile à introduire et à comprendre que la réduction dans l'octave de base de 53 quintes égales. Le schéma ci-dessous provient de http://fr.wikipedia.org/wiki/Gamme_pythagoricienne.




On voit que l'octave de Do à Do est divisé en 53 petit carrés représentant chacun le comma de Holder-Mercator (Ch = 1/53 Oct = 0,113 Ton), très voisin du comma de Pythagore (0,117 Ton). Le demi-ton diatonique (limma) vaut 4 commas et le demi-ton chromatique (apotome) en vaut 5. Le ton, somme des deux demi-tons précédents, est alors égal à 9 commas. Et tout est dit !

Le ton de Holder est égal à 9/53 Oct = 54/53 Ton = 1,019 Ton, extrêmement proche du ton de Pythagore (1, 020 Ton), mais légèrement différent du ton tempéré (1 Ton ! ).

### Tempérament de Cordier

J'ajoute dans ce chapitre un tempérament dont l'histoire est récente puisqu'il s'agit du **tempérament égal à quintes justes**, ou tempérament Cordier, qui date de 1974.

Presque tout est dit sur : http://www.temperamentcordier.org/introduction/introduction.html

**Cordier abandonne le postulat de l'octave** qui considère comme équivalentes (ayant le même nom) deux notes dont le rapport des fréquences est égal à 2. **Cette gamme n'est donc pas construite comme les précédentes, en utilisant le cycle des quintes**.

Cordier définit simplement le demi-ton comme étant égal à un septième de quinte juste :

**1/2 ton = Qj/7 = 0,5014 Tons**.

Toutes les quintes (égales à 7 demi-tons) sont donc justes. Les tierces ne le sont évidemment pas et valent 2,006 Tons (Tj = 1,932 Tons).

L'intervalle entre deux notes distantes d'une octave n'est plus égale à 6 Tons mais à 12 Qj/7, c'est-à-dire 6,0168 Tons. L'octave de Cordier est donc égale à 1,0028 Oct.

## Calculs annexes sur les tempéraments mésotoniques *(lecture déconseillée aux âmes sensibles)*

Nous tentons dans ce dernier paragraphe des calculs de justesse des tempéraments mésotoniques Ces calculs ont un **intérêt très limité**.

Nous travaillons indépendamment sur la justesse des quintes, puis sur celle des tierces.

### *Justesse des quintes*

Les gammes mésotoniques sont construites avec 11 quintes égales Q et une quinte Q' = 7 – 11Q.

La fausseté de la quinte Q est évidemment |Q – Qj|. Celle de la quinte Q' est |7 – 11Q – Qj|.

Le tableau ci-contre montre les 6 tonalités concernées par la quinte Q'.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Do | Q | Q | Q | Q | Q | Q | Sol | Q | Q | Q | Q | Q | Q |
| Fa | Q | Q | Q | Q | Q | Q | Ré | Q | Q | Q | Q | Q | Q |
| Si ♭ | Q | Q | Q | Q | Q | Q | La | Q | Q | Q | Q | Q | Q |
| Mi ♭ | Q' | Q | Q | Q | Q | Q | Mi | Q | Q | Q | Q | Q | Q' |
| La ♭ | Q | Q' | Q | Q | Q | Q | Si /Do ♭ | Q | Q | Q | Q | Q' | Q |
| Ré ♭ /Do# | Q | Q | Q' | Q | Q | Q | Sol ♭ / Fa# | Q | Q | Q | Q' | Q | Q |

On pose X = Q – Qj.

La fausseté moyenne des quintes dans les tonalités ne contenant pas Q' est f = |X|.

En utilisant 12Qj = 7 + Cp on montre que la fausseté de la quinte Q' est égale à |11X + Cp|.

D'après les résultats de l'annexe « A6 Justesse », la fausseté quadratique moyenne des quintes pour les tonalités contenant 5 fois Q et une fois Q' est donc donnée par :

$$f'^2 = \frac{1}{6}(5X^2 + (11X + Cp)^2)$$

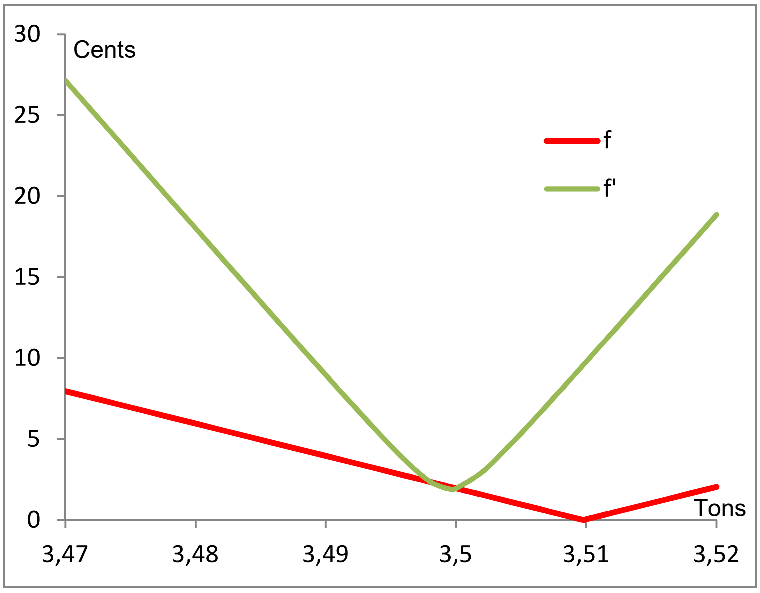
Le graphe ci-contre montre les courbes donnant f et f' en fonction de Q.

f s'annule évidemment pour Q = Qj.

f' est minimum pour Q = Qj – 11Cp/126.

Un choix musical concernant la justesse des quintes est lié à la tonalité et aux modulations utilisées dans le morceau composé.

Il est donc illusoire d'essayer de tirer des conclusions générales de ces calculs.




Cependant, on peut calculer le meilleur compromis possible quand on attribue la même importance musicale à toutes les tonalités.

Dans ce cas, on détermine la fausseté du tempérament $f_t$.

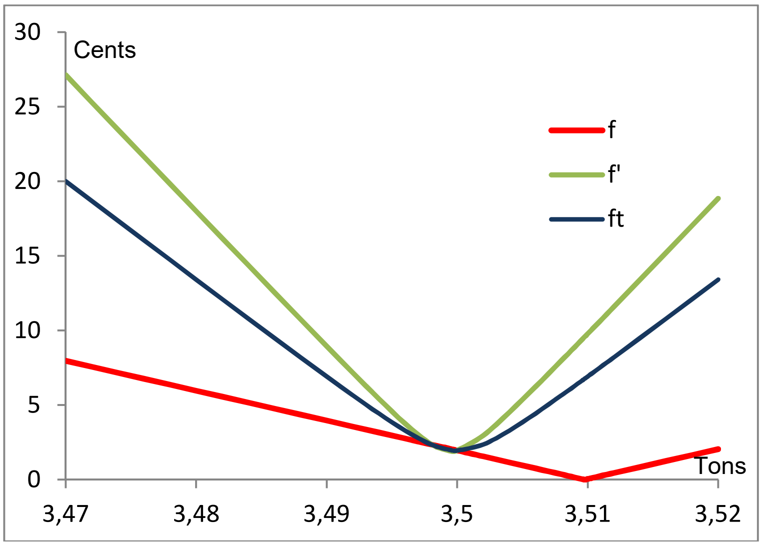
$$f_t^{\,2} = \frac{1}{12}\left(6X^2 + \left(5X^2 + (11X + Cp)^2\right)\right) = \frac{1}{12}\left(11X^2 + (11X + Cp)^2\right)$$

Un calcul de dérivée élémentaire montre que cette fausseté est minimum pour X = – Cp/12 = $-\gamma$.

Q = Qj – $\gamma$ = Qt.

Parmi tous les tempéraments mésotoniques, la **fausseté** des quintes est **minimum** pour **le tempérament égal**.

Elle vaut Cp/12 = $\gamma$ = 1,95 cents.




## *Justesse des tierces*

Pour les 3 tierces de chaque tonalité, c'est un peu plus compliqué puisque la hauteur d'une tierce dépend de celles de 4 quintes consécutives. Il y a donc deux types de tierce :

$T_1$ = 4Q – 2 et $T_2$ = 3Q + Q' – 2 = 3Q + 7 – 11Q – 2. $T_2$ = 5 – 8Q.

Nous donnons dans le tableau ci-contre les tierces qui apparaissent dans chacune des tonalités.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Do | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ | Sol | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ |
| Fa | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ | Ré | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ |
| Si ♭ | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ | La | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ |
| Mi ♭ | $T_2$ | $T_1$ | $T_1$ | Mi | $T_1$ | $T_1$ | $T_2$ |
| La ♭ | $T_2$ | $T_2$ | $T_1$ | Si /Do ♭ | $T_1$ | $T_2$ | $T_2$ |
| Ré ♭ /Do# | $T_2$ | $T_2$ | $T_2$ | Sol ♭ / Fa# | $T_2$ | $T_2$ | $T_2$ |

La fausseté de la tierce $T_1$ est $f_1$ = |$T_1$ – Tj| = |4Q – 2 – Tj|.

On sait que Tj = Tp – Cs (voir « Intervalles fondamentaux ») et que Tp = 4Qj – 2.

En utilisant les relations ci-dessus et la relation 12Qj = 7 + Cp on montre aisément que :

$f_1$ = |4X + Cs| et $f_2$ = |4X + Cp – Cs|.

La fausseté quadratique moyenne des tierces pour les différentes tonalités est donnée dans le tableau ci-contre.

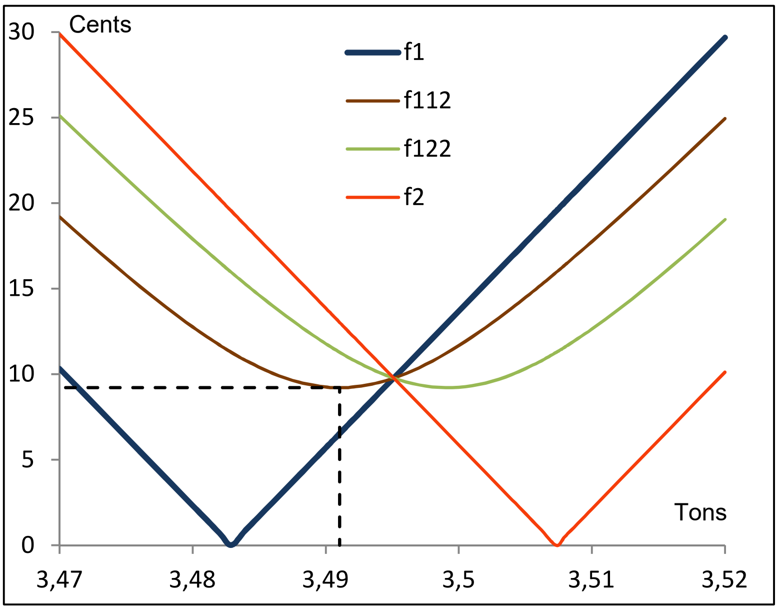
| | | |
|---|---|---|
| Do | $f_{111}^2 = f_1^2 = (4X + Cs)^2$ | Sol |
| Fa | | Ré |
| Si ♭ | | La |
| Mi ♭ | $f_{112}^2 = \frac{2}{3}f_1^2 + \frac{1}{3}f_2^2$ | Mi |
| La ♭ | $f_{122}^2 = \frac{1}{3}f_1^2 + \frac{2}{3}f_2^2$ | Si/Do ♭ |
| Ré ♭ /Do# | $f_{222}^2 = f_2^2 = (4X + Cp - Cs)^2$ | Sol ♭ / Fa# |

Le graphe ci-contre montre les courbes donnant les 4 faussetés en fonction de Q.

6 tonalités ne contiennent que la tierce $T_1$. Pour cette raison, la courbe $f_1$ est en gras.

$f_1$ s'annule évidemment pour
Q = Qj – Cs/4 = 3,483 Tons.

Comme pour les quintes, on ne peut pas tirer de conclusions générales mais on peut également chercher pour quelle valeur de Q la fausseté moyenne des tierces est minimum quand toutes les tonalités ont la même importance musicale.




Il y a globalement 2 fois plus de tierces $T_1$ que de tierces $T_2$. La fausseté moyenne des tierces est donc $f_{112}$.

$$f_{112}^2 = \frac{2}{3}(4X + Cs)^2 + \frac{1}{3}(4X + Cp - Cs)^2$$

Là encore, un calcul élémentaire montre que, parmi tous les tempéraments mésotoniques, la **fausseté** des tierces est **minimum** pour Q = Qj – (Cp + Cs)/12 = 3,491 Tons.

La fausseté minimum des tierces est égale à 9,2 cents (voir graphique ci-dessus).

Selon l'importance relative accordée aux différentes tierces et quintes, on est donc amené à choisir Q entre 3,491 Tons et 3,5 Tons pour avoir une fausseté minimum.

La conclusion de ces calculs est qu'il est illusoire d'espérer en tirer quelque chose d'utile !