GAMMES DIATONIQUES

Résumé

Après une présentation historique extrêmement sommaire, nous expliquons la construction de la gamme diatonique de Pythagore par réduction dans l'octave de base d'une suite de 6 quintes justes. Cette démarche est accompagnée de nombreuses illustrations montrant également les intervalles importants qui apparaissent dans cette gamme.

Nous généralisons les résultats obtenus à l'ensemble des gammes diatoniques à quintes égales. Nous en déduisons que toute gamme diatonique peut être considérée comme la réduction d'un ensemble de 6 quintes inégales pas trop fausses.

Nous présentons une technique générale de construction de gammes diatoniques à tierces justes dont la gamme de Zarlino est un cas particulier.

Atteindre :

GAMME DIATONIQUE DE PYTHAGORE

GAMMES DIATONIQUES A QUINTES ÉGALES

GAMMES DIATONIQUES A TIERCES JUSTES

GAMME DIATONIQUE DE PYTHAGORE

Introduction

Une gamme diatonique est constituée des 7 notes Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si. Ces notes successives sont séparées d'un ton ou un demi-ton. La position des demi-tons ne semble pas obéir à une logique évidente.

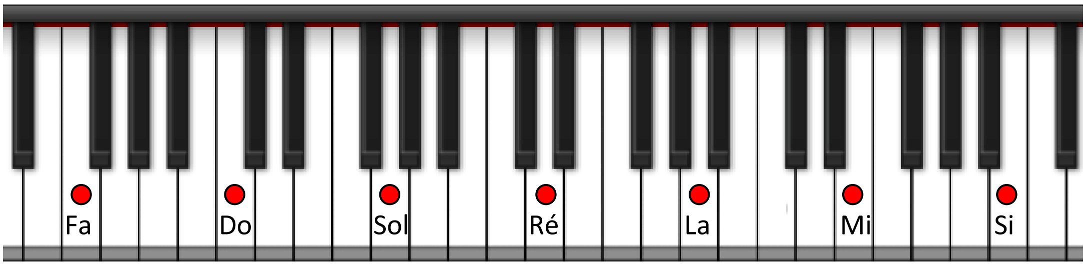
D'un point de vue historique, nous dirons simplement que la gamme diatonique trouve son origine dans l'antiquité. Elle est généralement attribuée à Pythagore et ses disciples. Elle est basée sur une suite de 7 notes séparées par une quinte juste et ramenées dans une octave.

Toute la musique occidentale jusqu'à la fin du $19^{ème}$ siècle accorde une importance prépondérante à la gamme diatonique et à ses différentes tonalités.

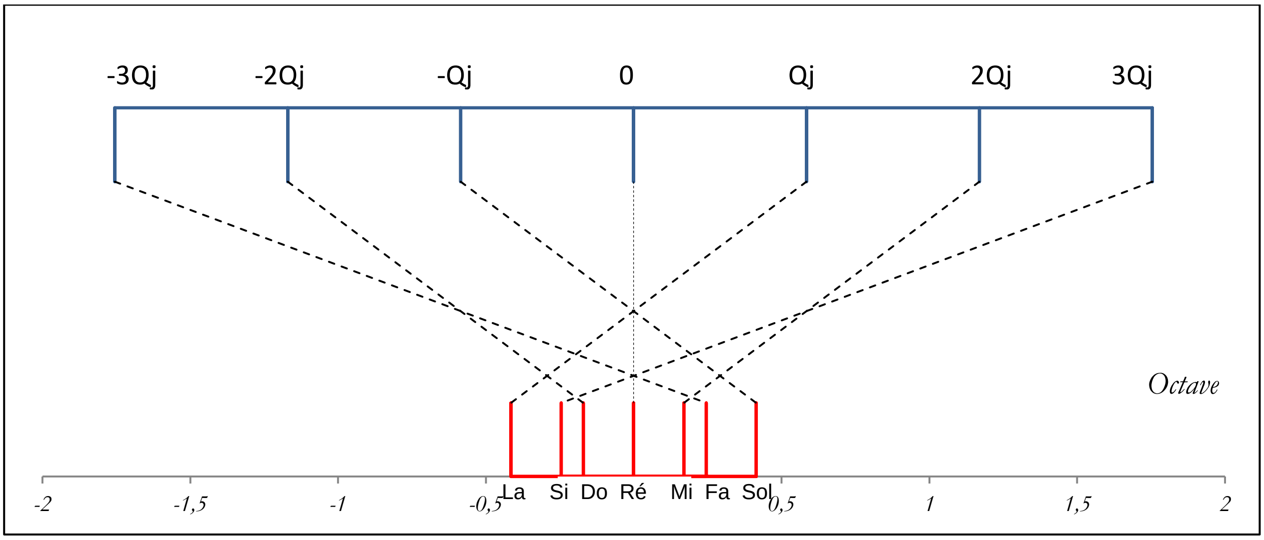
Principe de construction

Nous illustrons le principe de construction en visualisant un clavier de piano.

Les 7 notes de la gamme diatonique de Do majeur forment, en partant du Fa, une succession de quintes.



Pour retrouver la gamme diatonique habituelle, il faut « réduire » dans la même octave cet ensemble de 7 notes qui s'étend sur plus de 3 octaves. Compte tenu de la symétrie de cet ensemble de quintes par rapport au Ré, il est logique de choisir l'octave centrée sur le Ré c'est-à-dire celle qui va du La au La.



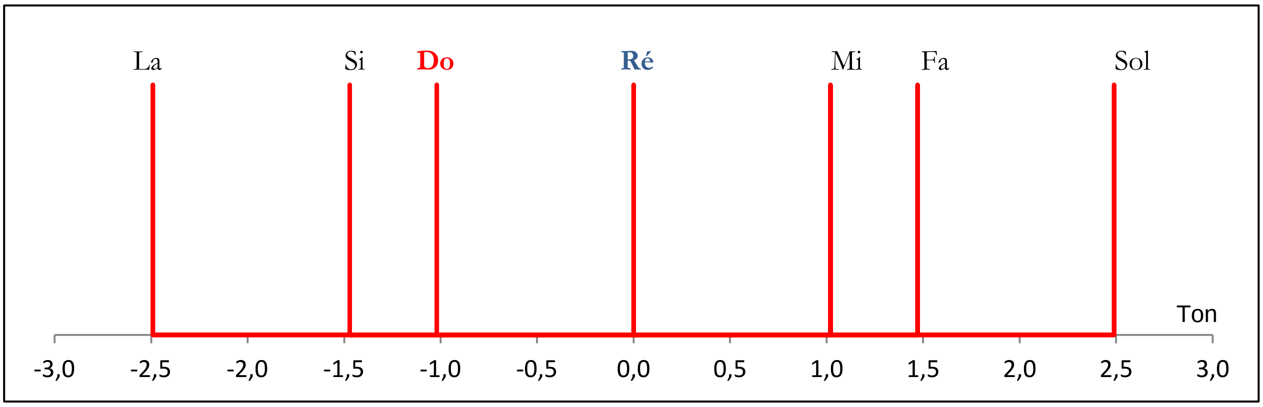
La notation originelle des notes, A, B, C…, conservée dans les pays anglo-saxons, tient compte de cette symétrie. Il aurait d'ailleurs été préférable de donner à cette gamme le nom de la note centrale (au sens de la symétrie) et de l'appeler gamme de « Ré central majeur ». Mais l'histoire en a décidé autrement.

La technique de réduction dans l'octave de base d'un ensemble de notes est expliquée dans « Vocabulaire de base ». L'exemple utilisé est précisément celui qui nous concerne ici.

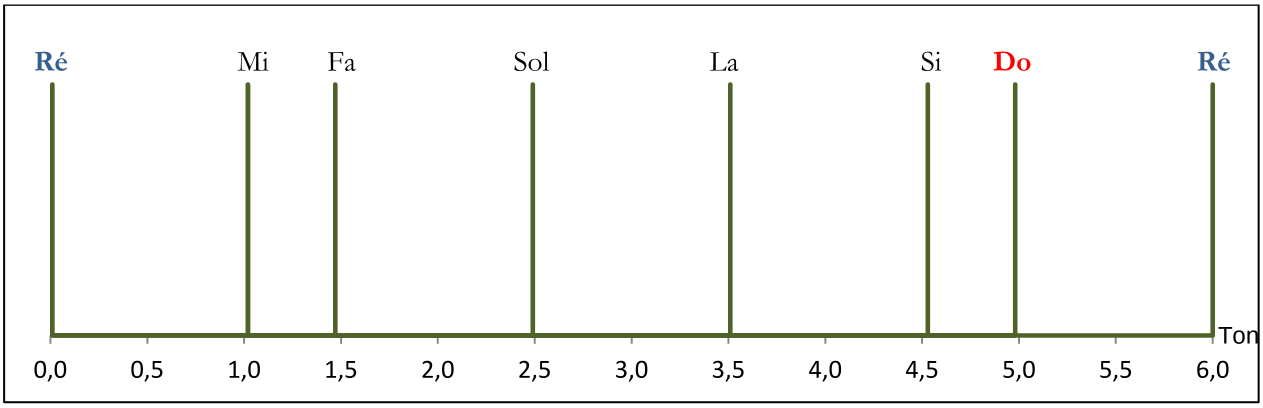
Nous reproduisons les résultats déjà obtenus et nous montrons les représentations linéaires des notes dans les octaves [–3, +3] et [0, 6].

Hauteur	–3Qj	–2Qj	–Qj	0	Qj	2Qj	3Qj	
	–1,75	*–1,17*	*–0,58*	*0*	*0,58*	*1,17*	*1,75*	*Octaves*
Réduction	*0,25*	*–0,17*	*0,42*	*0*	*–0,42*	*0,17*	*–0,25*	*Octaves*

Réduction dans [–3, +3].



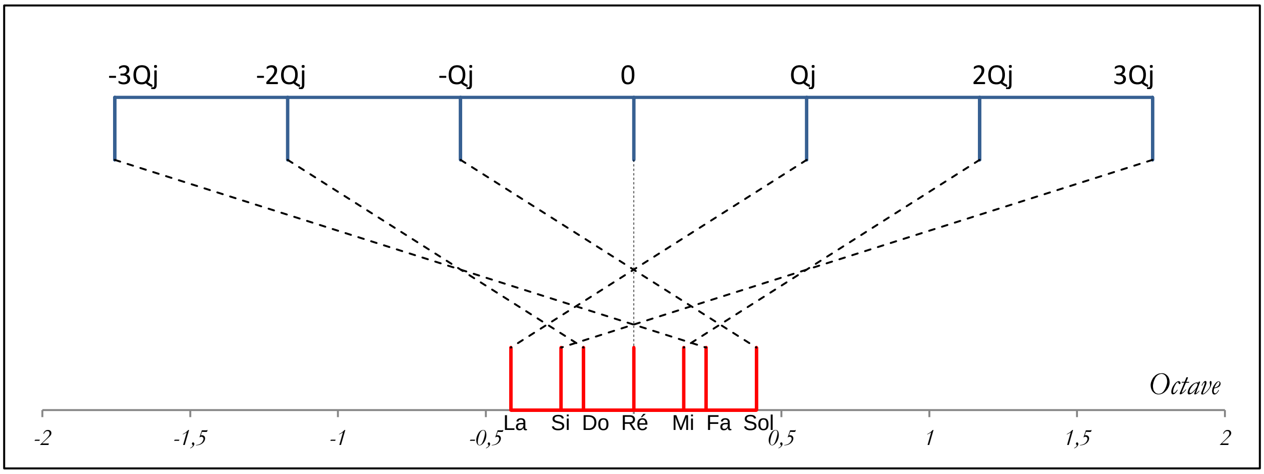
Réduction dans [0, 6].



Intervalles dans la gamme diatonique de Pythagore

Les intervalles que nous allons déterminer sont le demi-ton, le ton, la tierce majeure et la quinte. La tierce mineure et la quarte se déduisent des précédents (voir « Harmoniques »).

Ces intervalles sont facilement « lisibles » sur la réduction ci-dessous.



Les deux demi-tons Si–Do et Mi–Fa sont égaux et valent –5Qj (+ 3 Oct). La quantité entre parenthèses est le nombre d'octaves à ajouter pour la réduction dans l'octave de base.

Les tons sont tous égaux et valent 2Qj (– 1 Oct). Mais le ton n'est pas égal à deux demi-tons ! ! La différence entre un ton et deux demi-tons est appelé comma de Pythagore : Cp = 12Qj – 7.

Les tierces majeures Do–Mi, Fa–La, Sol–Si valent 4Qj (– 2 Oct), c'est à dire deux tons.

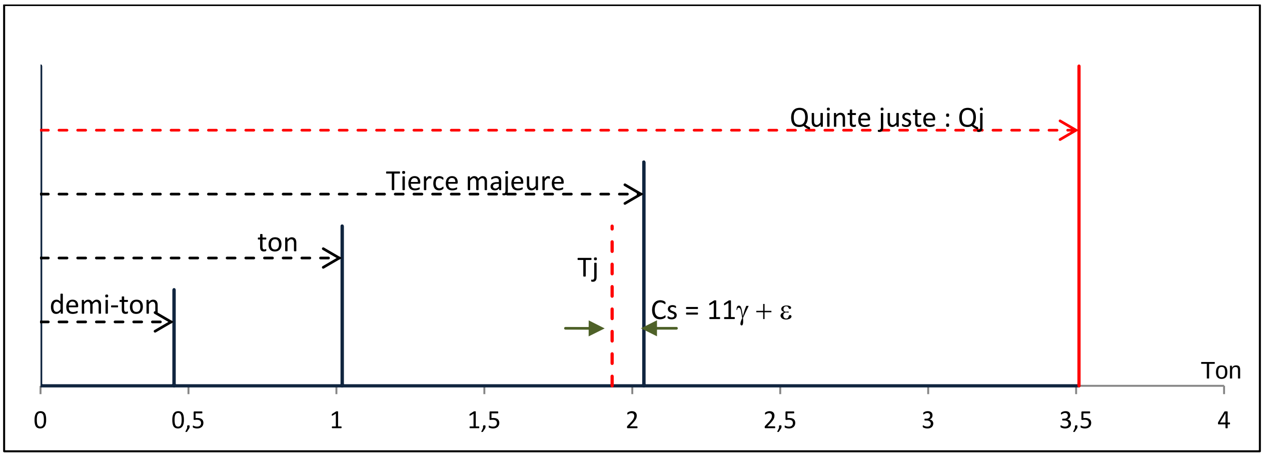
Les 6 intervalles de quinte, Fa–Do, Sol–Ré, La–Mi, Do–Sol, Ré–La et Mi–Si sont évidemment tous égaux à Qj.

En utilisant les relations établies dans « Intervalles fondamentaux », on obtient les expressions ci-contre pour les intervalles précédents.

Demi-ton	ton	Tierce majeure	Quinte
–5Qj + 3 Oct	2Qj – 1 Oct	4Qj – 2 Oct	Qj
½ Ton – 5 γ	1 Ton +2 γ	2 Tons + 4 γ	3,5 Tons + γ
		Tj + Cs	Qj

On rappelle que Tj = $\log_2(5/4)$ est la tierce juste. Cs est le comma syntonique, écart entre la tierce de Pythagore et la tierce juste : Cs = $\log_2(81/80) = 11\gamma + \varepsilon$ (voir « Intervalles fondamentaux »).

La figure ci-dessous montre tous ces intervalles.



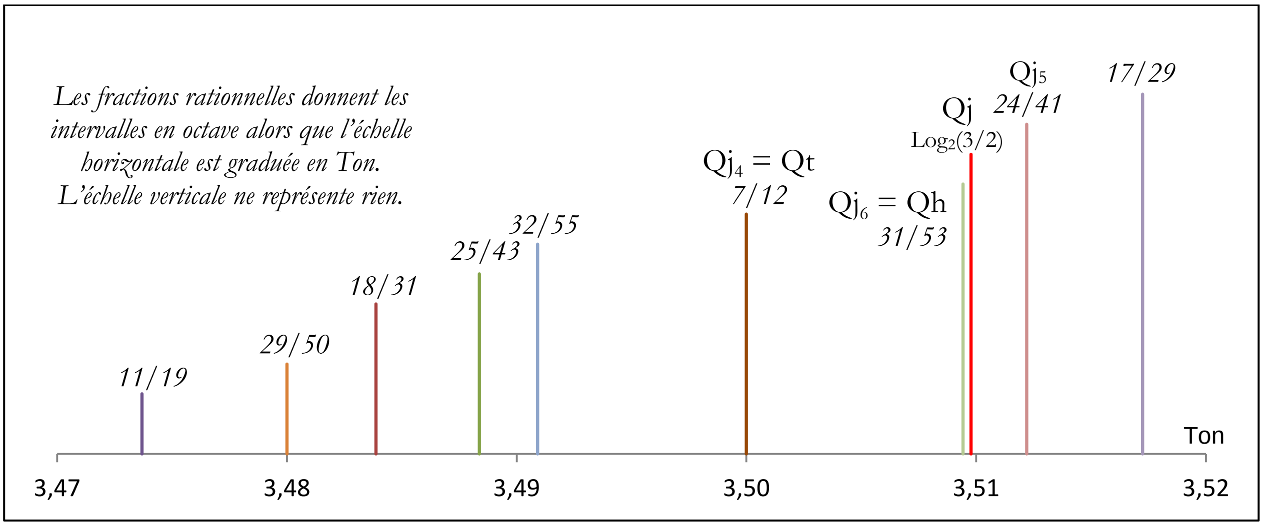
Dans le chapitre suivant, nous généralisons ce mode de construction à l'ensemble des gammes diatoniques à quintes égales.

GAMMES DIATONIQUES A QUINTES ÉGALES

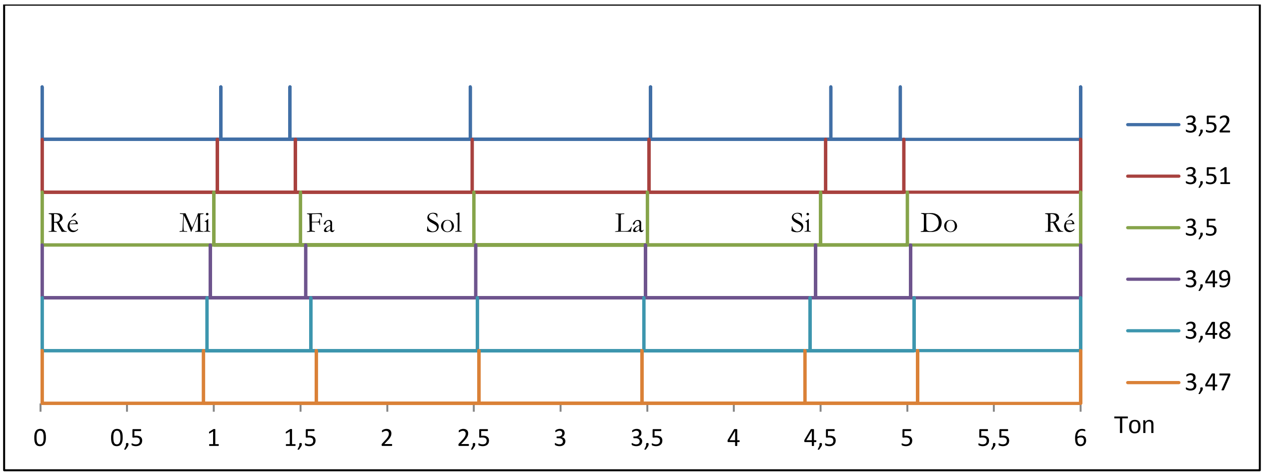
Principe de construction

Le travail effectué ci-dessus avec la quinte juste peut évidemment être réalisé avec une quinte fausse quelconque.

On montre dans « Des quintes en quantité » que les quintes « utiles » ont des valeurs comprises approximativement entre 3,47 et 3,52 Tons (rappel ci-dessous).



Nous montrons ci-dessous les gammes obtenues par réduction dans l'octave [0, 6] de 7 notes équidistantes d'une quinte Q variant de 3,47 à 3,52 Tons.



Nous aurions pu montrer la gamme de Do à Do mais pour des raisons esthétiques liées à la symétrie et au fait que le Ré est la note centrale de notre suite de quintes, nous préférons garder celle de Ré à Ré.

Gamme diatonique tempérée

Dans le graphique ci-dessus, la gamme Q = 3,5 Ton est la gamme tempérée.

Dans cette gamme, les demi-tons sont égaux à la moitié d'un ton qui est lui-même égal au Ton (avec une majuscule) que nous avons choisi comme unité de hauteur secondaire (1/6 d'octave).

Un peu d'histoire concernant cette gamme tempérée (source Encyclopœdia Universalis).

A la fin du 17ème siècle, afin de faire cohabiter au mieux les quintes et les tierces et de résoudre les problèmes de transposition liés aux gammes de Pythagore et de Zarlino, A. Werckmeister (1645-1706) trouva un compromis qui résultait d'un effort de généralisation et que, depuis, on utilise sous le nom de *gamme tempérée*. L'idée de Werckmeister est alors d'une géniale simplicité : il pose l'équation 12 quintes = 7 octaves. L'avantage énorme du système est de permettre toutes les transpositions et d'ouvrir aux musiciens la possibilité d'écrire dans toutes les tonalités en utilisant les instruments à clavier à 12 touches par octave. Jean-Sébastien Bach devait apporter une éclatante confirmation de l'efficacité de cette méthode en écrivant le *Clavecin bien tempéré* (1722).

Voir également un copier-coller d'un texte trouvé sur :
http://organ-au-logis.pagesperso-orange.fr/Pages/Temperam.htm#Werck4

De 1681 à 1691, Werckmeister ne fait mention que de tempéraments inégaux. Le tempérament égal n'est décrit qu'à partir de 1697 et, s'il indique qu'il pourrait être une solution lorsque les incursions dans les tonalités éloignées se multiplient, la rejette cependant car il note que les musiciens ne l'acceptent pas. Lui même préfère les tempéraments inégaux qui favorisent les tonalités diatoniques. Ce n'est qu'en 1702 qu'il prend parti en faveur du tempérament moderne, faisant valoir les possibilités de transpositions illimitées et les modulations enharmoniques qu'il autorise.

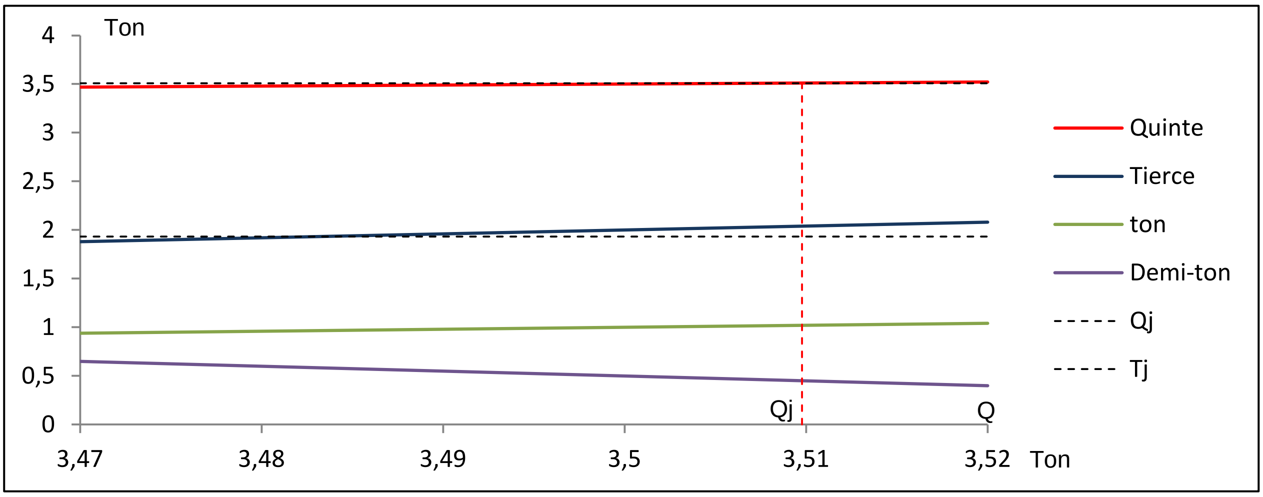
Dans ces textes apparaissent des mots compréhensibles seulement par les personnes ayant une formation musicale solide.

Intervalles

Dans les relations obtenues avec la gamme de diatonique de Pythagore, il suffit de remplacer Qj par Q pour généraliser le résultat.

Demi-ton	ton	Tierce majeure	Quinte
–5Q + 3 Oct	2Q – 1 Oct	4Q – 2 Oct	Q

En langage mathématique, ces intervalles sont des fonctions affines de Q (des droites), que nous montrons ci-dessous.



Nous avons ajouté les droites horizontales en pointillés donnant les hauteurs de la quinte juste et de la tierce juste. La droite verticale en pointillé indique la position de Qj.

On constate que **les tierces et les quintes ne peuvent pas être justes en même temps**.

La quinte est juste pour Q = Qj, évidemment.

La tierce est juste pour Q = Qj – Cs/4 = 3,4829 Tons. La gamme ainsi formée est la seule qui soit à quintes égales (mais fausses) et à tierces justes. On la retrouvera évidemment dans le chapitre suivant, « Gammes diatoniques à tierces justes ».

Comme nous l'avons vu pour la gamme diatonique de Pythagore, le ton n'est pas égal à deux demi-tons, sauf pour Q = 3,5 Tons. La différence entre un ton et deux demi-tons est appelé le comma (ne pas confondre avec le comma syntonique). Il est donné par C = |12Q – 7|.

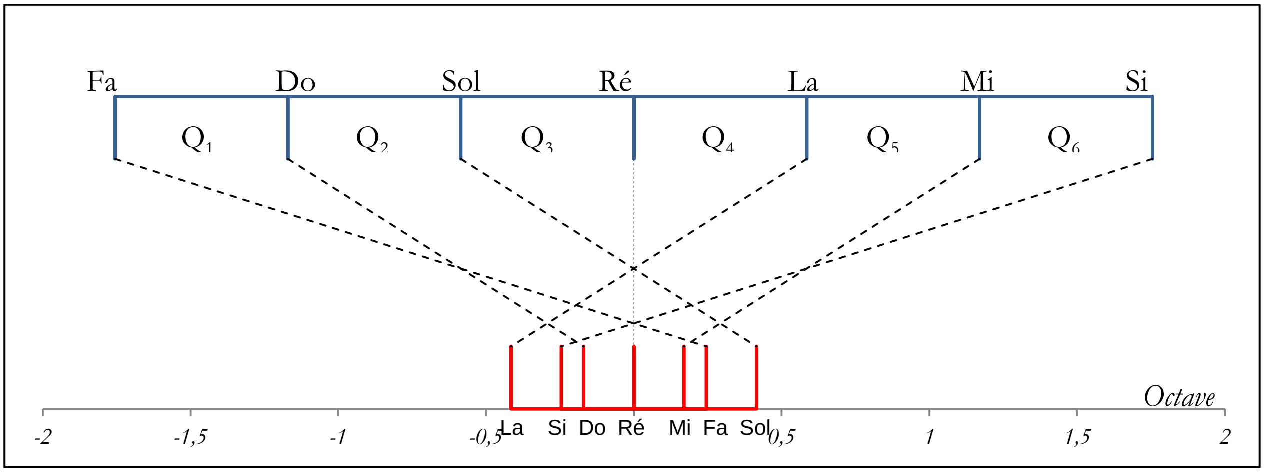
GAMMES DIATONIQUES A TIERCES JUSTES

Lors de mes lectures, je n'ai pas trouvé d'étude systématique de ce type de gamme. Je n'ai cependant pas la prétention de faire ici œuvre originale.

Introduction

Il résulte de ce qui précède que la réduction dans l'octave de base d'un ensemble de 7 notes distantes (mais non équidistantes) d'une quinte fausse (comprise entre 3,47 et 3,52 tons, sans que ces valeurs constituent des limites absolues) fournit une gamme diatonique ni meilleure ni pire (musicalement) que les gammes diatoniques à quintes égales construites ci-dessus.

L'ensemble de notes à réduire est simplement défini par les intervalles (de Q_1 à Q_6) entre ces notes (schéma ci-dessous).



Nous cherchons ici à déterminer quelles quintes on doit utiliser pour obtenir une gamme diatonique à tierces justes.

Construction

Dans cette gamme, les seules tierces possibles sont Fa-La, Do-Mi, et Sol-Si.

Le mode de construction utilisé montre que ces tierces valent :

Fa-La : $T_1 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - 2$

Do-Mi : $T_2 = Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 - 2$

Sol-Si : $T_3 = Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 - 2$

L'égalité de ces trois tierces impose $Q_5 = Q_1$ et $Q_6 = Q_2$.

Toutes ces tierces sont justes si $T_1 = T_2 = T_3 = Tj = 4Qj - 2 - Cs$.

On aboutit ainsi à une équation à 4 inconnues : $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 4Qj - Cs$.

Cette équation possède évidemment une infinité de solutions mathématiques.

Justesse des quintes

Les solutions que nous allons rechercher sont celles qui conservent la meilleure justesse possible des quintes.

Une solution simple et intuitive consiste à prendre 4 quintes justes ($Q_1 = Q_5 = Q_2 = Q_6 = Qj$). Pour Q_3 et Q_4, on prendra une des deux juste et l'autre égale à $Qj - Cs$. Cette solution est celle choisie (mais dans une démarche différente) par Zarlino. Cette gamme ayant un intérêt historique, nous lui consacrons en annexe le fichier « Gamme de Zarlino ».

On peut également procéder de façon un peu moins brutale et répartir la fausseté des quintes sur chacune d'entre elles : Q_k = Qj – Cs/4. Ce résultat a déjà été observé dans le chapitre précédent comme étant la seule gamme à quintes égales et tierces justes.

On peut également chercher une solution optimale en minimisant la fausseté de l'ensemble des 6 quintes. Pour cela, on utilise les résultats établis dans l'annexe « Justesse ».

On pose $X_k = Q_k - Qj$. La fausseté quadratique moyenne s'exprime en fonction des trois variables indépendantes X_1, X_2 et X_3 puisque $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 - Cs$, $X_5 = X_1$ et $X_6 = X_2$.

$$f^2 = \frac{1}{6}\left(2X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 + (X_1 + X_2 + X_3 + Cs)^2\right)$$

L'annulation des dérivées partielles de f² par rapport à X_1, X_2 et X_3 donne aisément[1] les résultats suivants : $X_1 = X_2 = X_5 = X_6 = -Cs/6$ et $X_3 = X_4 = -Cs/3$.

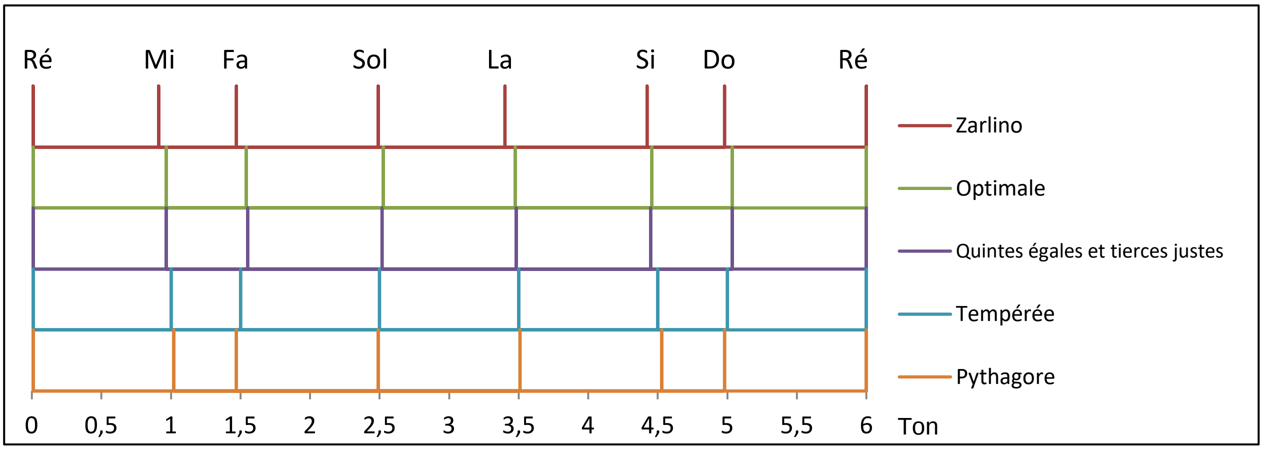
On a alors f² = Cs²/18, c'est-à-dire une fausseté f = 5,1 cents.

Dans le choix effectué par Zarlino, elle vaut f² = Cs²/6, f = 8,8 cents.

Avec des quintes égales, on a f² = Cs²/16, f = 5,4 cents, résultat très proche du résultat optimal.

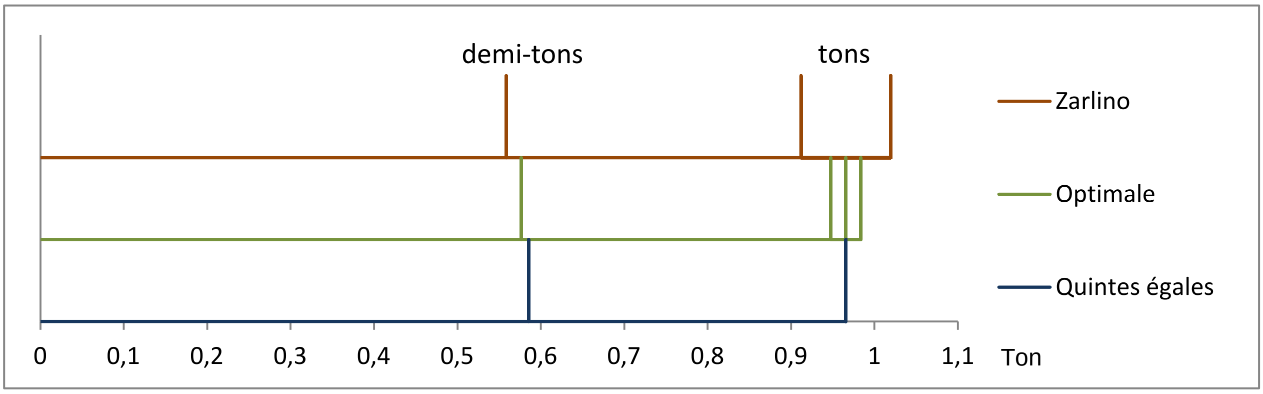
Rappelons une fois encore que ces calculs ont un intérêt musical extrêmement limité, pour ne pas dire nul. Ils ont pour seule vertu d'être logiques et rigoureux.

Le schéma ci-dessous montre les trois gammes à tierces justes calculées précédemment ainsi que la gamme de Pythagore et la gamme tempérée.



Intervalles

L'expression littérale des tons et demi-tons n'a pas grand intérêt. Nous nous contentons de montrer ci-dessous leur graphe dans les trois cas évoqués dans le paragraphe précédent : la gamme optimale, la gamme de Zarlino et la gamme à quintes égales.



[1] Le lecteur mathématicien pourra vérifier les calculs. Les autres se contenteront du résultat en me faisant confiance.

Dans les trois cas, les deux demi-tons sont égaux et, selon la gamme choisie, on a 1, 2 ou 3 valeurs possibles pour les cinq tons de la gamme. De plus, les tons ne sont jamais égaux à deux demi-tons, comme pour les gammes à quintes égales (sauf évidemment la gamme tempérée).

Nous verrons dans « Tonalités » que l'existence des gammes à quintes inégales pose de gros problèmes de transposition.