CONVERGENCE DES SÉRIES

Résumé

Nous rappelons ici les délicats problèmes de convergence des séries dans les nombres « habituels ». Nous verrons que la condition de convergence d'une série de nombres p-adiques est d'une simplicité enfantine.

Introduction

Une suite $\{b_k\}$ est une suite infinie de nombres.

Une série est la somme d'une quantité infinie de nombres : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Les notions de suites et de séries sont intimement liées en mathématiques puisque les sommes partielles d'une série constituent les éléments d'une suite : $b_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$.

Une série est convergente si la suite de ses sommes partielles a une limite finie. Dans le cas contraire, elle est divergente.

Le sens commun peut nous laisser croire que l'addition d'une infinité de nombre conduit obligatoirement à un résultat infini mais le mathématicien, même débutant (voir paradoxe de Zénon), sait qu'il n'en est rien.

Les mathématiciens ont leur langage et leurs critères pour définir les conditions de convergence des séries et ils font ça très bien avec toute la rigueur nécessaire à ce genre de chose. Il est nécessaire de s'y référer si l'on veut acquérir une connaissance sérieuse du sujet. Les suites de Cauchy constituent un des pivots de la plupart des démonstrations qui sont d'une rigueur imparable. Elles font intervenir un petit nombre ε lié à un grand nombre N, mais leur esthétique est, à mon goût, discutable.

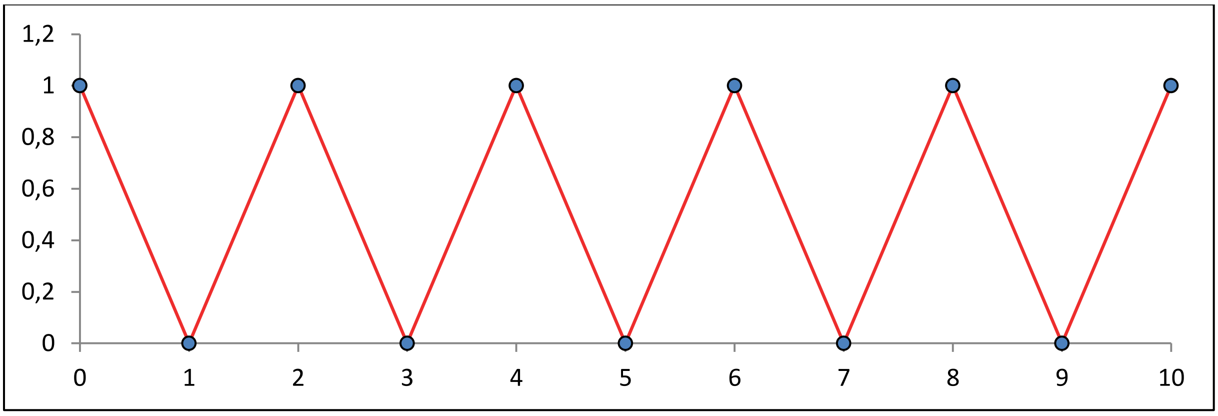
Fidèle à notre devise « Montrer plutôt que démontrer », nous nous contentons d'illustrer les résultats essentiels avec des exemples.

Convergence usuelle des séries

Exemples de séries divergentes et convergentes

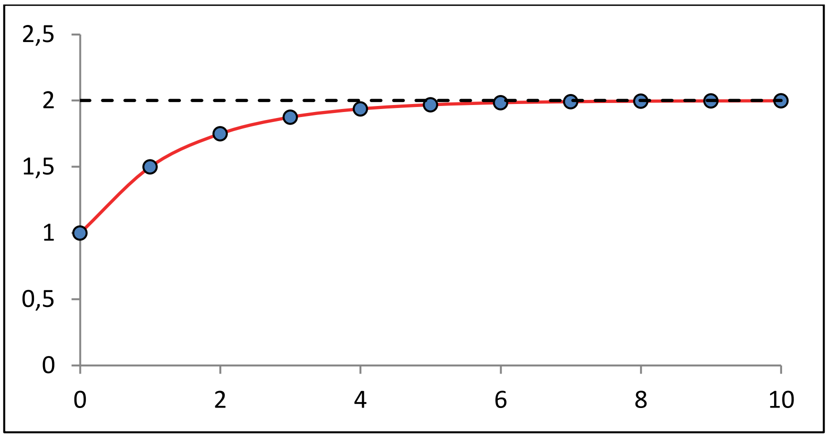
1 • On considère la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Les sommes partielles oscillent indéfiniment entre 0 à 1 et n'ont donc pas de limite. On dit que cette série est grossièrement divergente !

Tous les graphes ci-dessous montrent l'évolution des sommes partielles.



2 • La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ est convergente. C'est le paradoxe de Zénon, d'Achille et la tortue, du boisseau, de la flèche…

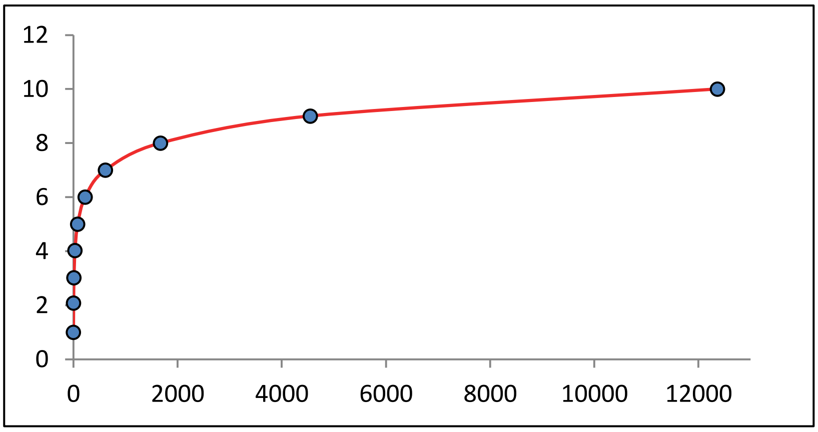
Le graphe ci-contre visualise la convergence rapide de cette série.



Dans le cas général, la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge vers $\frac{1}{1-x}$ si $|x|<1$.

3 • La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ est divergente, bien que l'on ajoute des termes de plus en plus petits.

En quelques clics avec un tableur, on s'aperçoit que la somme dépasse le total de 2 au 4ème terme, de 3 au 11ème, de 4 au 31ème… et de 10 au 12367ème ! ! !

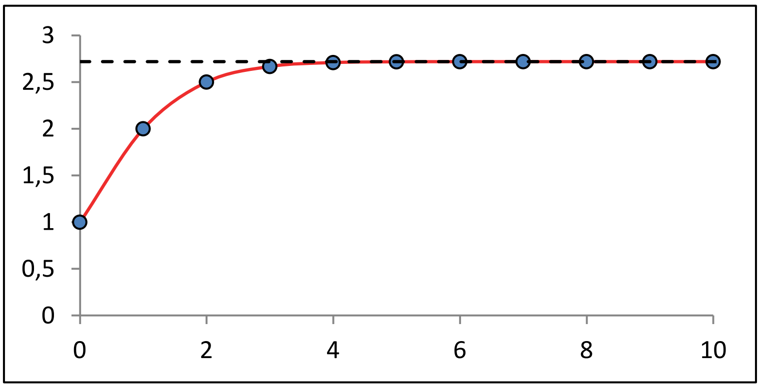


On peut démontrer rigoureusement que le résultat de cette somme est infini (on trouvera des démonstrations simples de la divergence sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_harmonique)

4 • La somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$ est convergente.

Le résultat est e = 2,718281…, base des logarithmes népériens.

La convergence est très rapide.



Conditions de convergence

De toute évidence, **pour qu'une série converge, il est nécessaire que a_n tende vers 0 quand n tend vers l'infini.**

Mais cette condition n'est pas suffisante comme on l'a vu dans le cas de la série harmonique.

Dans le cas général, l'étude de la convergence d'une série est un problème délicat car il n'existe pas de critère simple de convergence.

Pour une première approche sérieuse de ces questions, on peut consulter :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_convergente

Convergence des séries p-adiques

Nous continuons notre approche ludique et empirique en essayant de calculer quelques séries de nombres p-adiques pour voir quels sont les problèmes qui se posent dans ce cas là.

En utilisant quelques exemples, nous tentons de définir intuitivement les conditions de convergence d'une série p-adique.

Série géométrique

Nous essayons de calculer la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ en écrivant les fractions successives en représentation 5-adique.

On sait que 1/2 ~ **«2|3** . On peut en déduire $1/4$ ~ **«3|4** ainsi que 1/8 ~ **«14|2** .

Inutile d'aller plus loin car si on commence l'addition, on voit bien que tous les chiffres changent à chaque fois que l'on ajoute un terme et que notre série géométrique n'a pas de limite.

Elle est donc divergente, et même grossièrement divergente.

1	**… 0 0 0 0 0 0 1**
$+ 1/2$	**+ … 2 2 2 2 2 2 3**
	… 2 2 2 2 2 2 4
$+ 1/4$	**+ … 3 3 3 3 3 3 4**
	… 1 1 1 1 1 1 3
$+ 1/8$	**+ … 1 4 1 4 1 4 2**
	… 3 0 3 0 3 1 0

La divergence se manifeste sous une autre forme si on calcule cette série en représentation 2-adique.

En effet, dans ce cas, on a 1/2 ~ *1/10* ~ **0,1** , 1/4 ~ *1/100* ~ **0,01**, 1/8 ~ *1/1000* ~ **0,001** , etc.

Quand on ajoute ces nombres 2-adiques, on peut avoir l'illusion d'une convergence de la somme vers **0,1111111…** (une infinité de **1** après la virgule) mais on a vu dans « Représentation p-adique » qu'il est interdit pour un nombre p-adique d'avoir un nombre de chiffres infini après la virgule. Donc la convergence est illusoire.

Série géométrique (bis)

Essayons maintenant de calculer la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{10^n}$, grossièrement divergente en représentation usuelle. On aurait pu écrire **p** à la place de **10** puisque en représentation p-adique, on a toujours **p = 10** .

Si on compare à la série géométrique, on constate que l'addition de **10** ne change pas le premier chiffre à droite, celle de **100** ne change pas les deux premiers chiffres, celle de **1000** ne change pas les trois premiers chiffres…
Cette série est manifestement convergente et sa somme est **… 1 1 1 1 1 1 1 = «1|**

1	**… 0 0 0 0 0 0 1**
+ 10	**+ … 0 0 0 0 0 1 0**
	… 0 0 0 0 0 1 1
+ 100	**+ … 0 0 0 0 1 0 0**
	… 0 0 0 0 1 1 1
+ 1000	**+ … 0 0 0 1 0 0 0**
	… 0 0 0 1 1 1 1

On peut même en déduire « visuellement » que toute série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a_n 10^n}$ où $\mathbf{a_n}$ appartient à $\mathbb{Z}_p$ (tous les nombres sans virgule) est convergente.

Réflexion

La condition de convergence commence à se dessiner et elle est liée au nombre de zéros situés à la fin du terme général $\mathbf{a_n}$, donc à sa valuation.

Dans le paragraphe précédent, cette valuation est égale à n et tend donc vers l'infini avec n.

On n'a pas besoin d'une condition aussi violente et on « sent » bien que si, pour n suffisamment grand, cette valuation est une fonction croissante de n, la série sera convergente.

On admet donc sans démonstration le résultat suivant :

Pour qu'une série p-adique soit convergente, il faut et il suffit que $v(a_n)$ tende vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Cette condition est évidemment compatible avec l'affirmation « qu'une série p-adique est divergente quand la valuation du résultat tend vers $-\infty$ ».

Si on utilise l'implication $\mathrm{v}(\mathbf{a}) = \infty \Leftrightarrow \mathbf{a} =$ **«0|** alors la condition ci-dessus peut s'écrire :

Pour qu'une série p-adique soit convergente, il faut et il suffit que a_n tende vers «0| quand n tend vers l'infini.

Et enfin, si on introduit la valeur absolue d'un nombre p-adique (qui est un nombre réel positif), on peut dire :

Pour qu'une série p-adique soit convergente, il faut et il suffit que $|a_n|$ tende vers 0 quand n tend vers l'infini.

La condition de convergence d'une série p-adique est donc infiniment plus simple que celle d'une série usuelle.

Exemples de séries p-adiques convergentes

Condition de convergence d'une série géométrique

Essayons d'expliciter la condition sur **x** qui assure la convergence de la série géométrique $\sum_{n=0} \mathbf{x}^n$.

En utilisant les règles précédentes, on peut dire que cette série converge si $|\mathbf{x}^n|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Or $|\mathbf{x}^n| = |\mathbf{x}|^n$. La série converge donc si $|\mathbf{x}| < 1$.

Curieusement, on obtient la même condition de convergence que pour la série géométrique usuelle mais la définition de la valeur absolue n'est pas du tout la même.

Revenons à la valuation qui, à mon sens, permet de visualiser plus concrètement l'allure de **x**.

On rappelle que, en base p, $|\mathbf{x}| = 10^{-v(\mathbf{x})}$. La condition $|\mathbf{x}| < 1$ se traduit donc par v(|**x**|) > 0 .

Mais la valuation est toujours un nombre entier, ce qui veut dire, en langage clair, que la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}^n$ est convergente si et seulement si le nombre p-adique **x** se termine par un ou plusieurs 0.

Le résultat a la même forme que pour les nombres réels ($\sum_{n=0} \mathbf{x}^n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x}}$) puisqu'il est basé sur la propriété algébrique suivante : $1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)$.

Mais il faut replacer le signe moins par « p-1| : $\sum_{n=0} \mathbf{x}^n = \mathbf{1}/\mathbf{1} + \mathbf{x}\,«\mathbf{p-1}|$

Par exemple, pour p = 5 et x = 10, on a $\sum_{n=0} \mathbf{10}^n = \mathbf{1}/\mathbf{1} + \mathbf{10}\,«\mathbf{4}| = \mathbf{1}/«\mathbf{4}|\mathbf{1}$

Le calcul concret de la page précédente avait donné **«1|**. On peut vérifier que le produit de **«1|** par **«4|1** est bien égal à **1.**

On peut aussi aller voir dans « Représentation p-adique » que la représentation usuelle de **«1|** en base 5 (ou en base 10) était *-1/4* .

Série $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{n}!$

La série $\sum_{n=0} \mathbf{n}!$, grossièrement divergente en représentation usuelle, devient convergente en représentation p-adique.

En effet, un ou plusieurs zéros s'ajoutent à **n**! à chaque fois que **n** est un multiple de p.

On a déjà calculé la valuation de **n**! qui varie approximativement comme n/(p-1)).

v(**n**!) tend évidemment vers l'infini quand n tend vers l'infini. La série ci-dessus est donc convergente.

On ne peut pas donner, comme dans le cas de la série géométrique, une expression littérale du résultat. On devra se contenter, comme pour les racines carrées, de calculer successivement les chiffres de droite à gauche.

Le calcul concret pour les nombres 5-adiques n'est pas une mince affaire comme on peut le voir ci-contre.

Le premier chiffre à droite (**4**) ne change plus à partir de n = 10, c'est-à-dire p puisque les n ! suivants se termine par 0. Le deuxième chiffre (**2**) ne change plus à partir de 20 puisque les n ! suivants se termine par 00, etc.

La convergence est relativement lente et le résultat sans intérêt.

n	**n !**	Sommes partielles
0	**1**	**1**
1	**1**	**2**
2	**2**	**4**
3	**11**	**20**
4	**44**	**114**
10	**440**	**1 104**
11	**10 340**	**11 444**
12	**130 130**	**142 124**
13	**2 242 240**	**2 434 414**
14	**43 103 010**	**101 042 424**
20	**1 412 110 200**	**2 013 203 124**
21	**40 204 314 200**	**42 223 022 324**

Mais on peut le faire !