TOPOLOGIE p-ADIQUE

Résumé

La topologie des nombres « habituels » est simplissime : les nombres réels sont alignés sur une droite et les nombres complexes étalés dans un plan. La définition de la distance p-adique (voir annexe « Valeur absolue et distance ») change complètement la donne et conduit à placer les points p-adiques dans un espace à une infinité de dimensions. La propriété la plus « amusante » à mon goût est la suivante : tous les triangles sont isocèles !

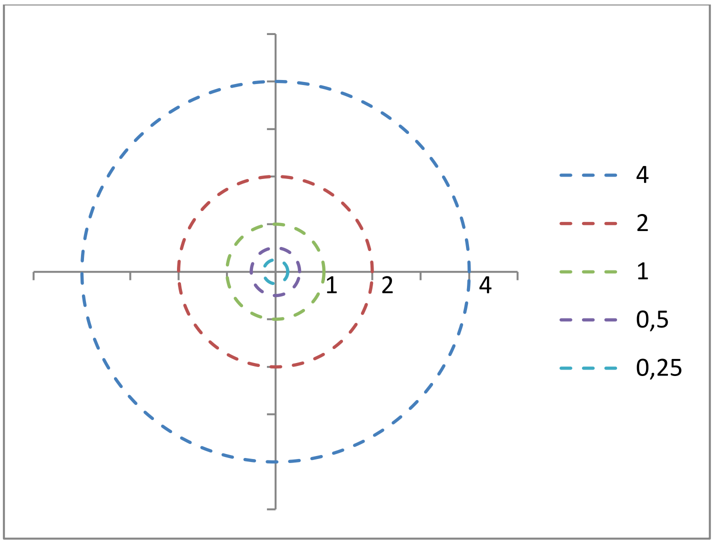
Répartition des « points » p-adiques par rapport à «0|

Nous rappelons d'abord un résultat obtenu dans « Valeur absolue et distance ».

La distance entre un point A et le point O est : $\mathrm{d}(\mathbf{x}\ ,\ \text{«}\mathbf{0|}) = |\mathbf{x}| = \mathrm{OA} = \mathrm{p}^{-\mathrm{v(x)}}$.

Tous les nombres ayant même valuation n sont situés sur une sphère de rayon p^n (n entier relatif).

Nous montrons ci-dessous une coupe de quelques-unes de ces sphères par un plan pour les nombres 2-adiques.



Les rayons donnés à droite sont évidemment en base 10.

Les unités 2-adiques sont situées sur la sphère de rayon égal à 1.

Les éléments de $\mathbb{Z}_2$ sont sur les sphères de rayon inférieur ou égal à 1.

Tous les nombres dont la valeur absolue est supérieure à 1 n'appartiennent pas à $\mathbb{Z}_2$ (ce sont des nombres à virgule).

Les nombres p-adiques sont les points d'intersection d'une infinité de sphères construites dans un espace euclidien de dimension infinie ! !

Topologie des nombres p-adiques

Propriétés élémentaires de la topologie ultra métrique

Une des premières définitions que l'on trouve dans un cours de topologie est celle de la « **boule** ». On précise même si la boule est ouverte ou fermée (comme la porte d'Alfred de Musset). Quand l'ensemble considéré est doté d'une distance, la boule est définie de la façon suivante :

Une **boule ouverte** de centre **x** et de rayon r est l'ensemble des **y** tels que d(**x** , **y**) < r.

Une **boule fermée** de centre **x** et de rayon r est l'ensemble des **y** tels que d(**x** , **y**) ≤ r.

La « surface » de la boule fermée appartient à la boule fermée de rayon r mais pas à la boule ouverte de même rayon. On l'appelle une sphère.

Une **sphère** de centre **x** et de rayon r est l'ensemble des **y** tels que d(**x** , **y**) = r.

Les propriétés élémentaires de toute topologie ultra métrique sont les suivantes :

1 • Tout triangle est isocèle.

2 • Tout point d'une boule en est le centre.

3 • Les boules sont à la fois ouvertes et fermées.

4 • Deux boules sont, soit disjointes, soit l'une est contenue dans l'autre.

5 • La topologie est totalement discontinue.

La démonstration de ces propriétés n'est pas très compliquée, mais elle est parfois un peu abstraite.

Dans les paragraphes suivants, nous allons démontrer ou simplement visualiser ces propriétés générales dans le cas particulier de la topologie p-adique.

1 • Tout triangle est isocèle.

La démonstration rigoureuse est élémentaire.

Compte tenu de l'invariance par translation, on peut toujours prendre le point O comme un des points du triangle, A et B étant les deux autres points.

Si OA = OB, alors le triangle OAB est évidemment isocèle.

Sinon, AB = Max (OA, OB) et le triangle est encore isocèle.

Nous pouvons tracer deux de ces triangles dans un plan euclidien.

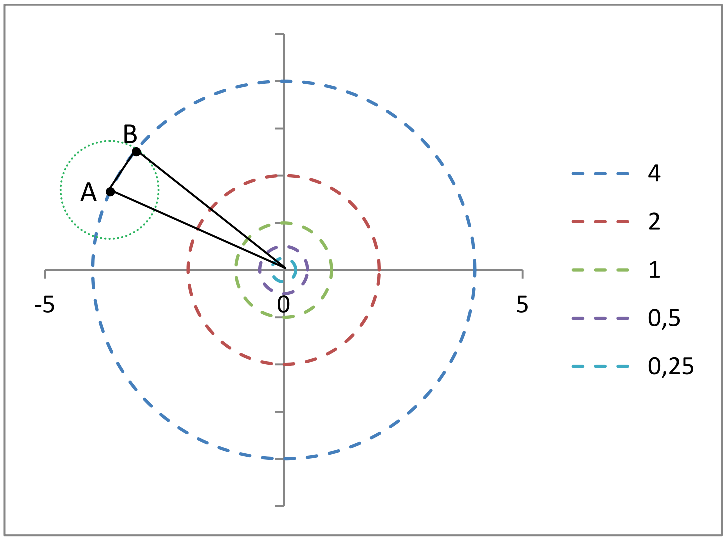
Cas OA = OB :

Essayons de placer deux points A et B sur le cercle de rayon 4.

Le choix du point A est arbitraire, mais le point B est obligatoirement à une distance de A qui est une puissance de 2 inférieure ou égale à 4.

Nous avons choisi AB = 1.

Il existe évidemment deux points B possibles dans le plan euclidien.



Mais on ne peut en garder qu'un car la distance entre ces deux points n'est pas une puissance de 2.

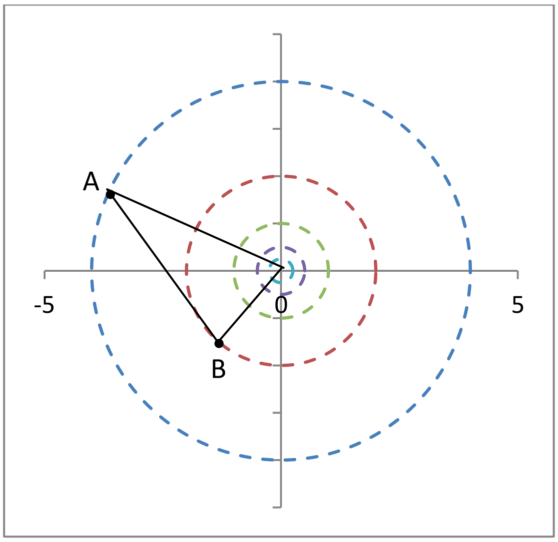
Cas OA ≠ OB :

Prenons encore un point A tel que OA = 4.

On veut placer un point B tel que OB = 2.

On est contraint par la propriété ultra métrique AB = Max(OA, OB) = OA = 4.

Là encore, on doit choisir une des deux possibilités pour le point B car la distance entre les deux points B possibles n'est pas une puissance de 2.



Sans rien démonter, on peut se convaincre aisément que dans l'espace euclidien à deux dimensions, on ne peut pas visualiser plus de trois points.

J'ai également l'intuition que dans l'espace à 3 dimensions, on peut dessiner 4 points au maximum.

Et je pense que l'on peut généraliser : un espace euclidien de dimension n contient au maximum n+1 points p-adiques.

2 • Tout point d'une boule en est le centre.

Cette propriété troublante est visuellement moins évidente mais la démonstration est simple.

Considérons la boule fermée de centre O et de rayon 4 (la bleue).

Soit A un point quelconque appartenant à cette boule (nous l'avons choisi sur la sphère de rayon 2) : OA ≤ 4.

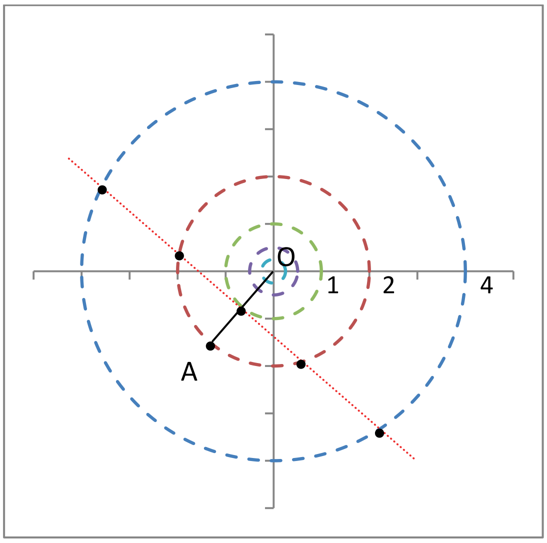
Soit B un autre point de cette boule : OB ≤ 4.

Par définition, A est le centre de la boule si AB ≤ 4 quel que soit B.

Or AB = Max (OA, OB) ≤ 4.

A est donc le centre de la boule.

Pour une boule ouverte, il suffit de remplacer ≤ par <.



Un seul point B est « possible » dans le plan de la figure. Il est à choisir parmi les intersections de la médiatrice de OA et des cercles de rayon 2^n.

3 • Les boules sont à la fois ouvertes et fermées.

Cette propriété contient apparemment une contradiction due simplement au raccourci de langage utilisé. En effet, sur notre exemple, les boules fermées ont un rayon égal à une puissance de 2 et les boules ouvertes ont un rayon différent d'une puissance de 2. Une boule de rayon donné est donc ou bien ouverte, ou bien fermée, mais pas les deux en même temps, ce qui est rassurant.

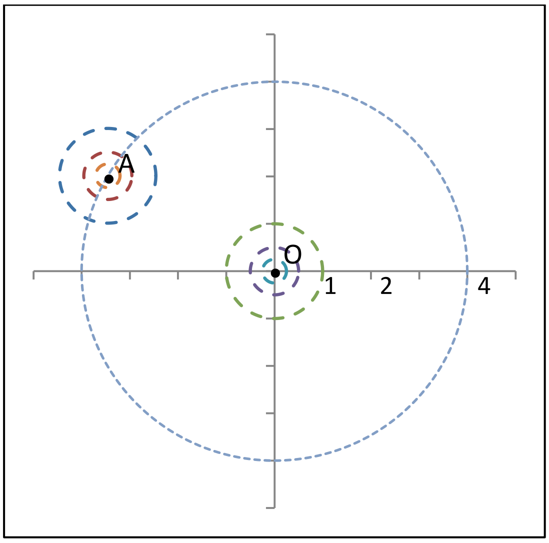
Mais la boule fermée de rayon 2 (par exemple) contient manifestement les mêmes nombres 2-adiques que la boule ouverte de rayon 4. Si on met en gris certains mots et que l'on ajoute les mots gris, on obtient « (la) **une boule fermée** de rayon 2 (par exemple) contient manifestement les mêmes nombres 2-adiques (que la) **est une boule ouverte** de rayon 4 ».

4 • Deux boules sont, soit disjointes, soit l'une est contenue dans l'autre.

La deuxième proposition de la phrase titre est abondamment illustrée sur tous les schémas précédents. J'irai même jusqu'à parler de boules gigognes. Les boules disjointes sont également faciles à visualiser.

Considérons deux boules de rayon 1, l'une centrée en O et une autre de centre A avec OA = 4.

Ces deux boules sont visuellement disjointes, même si on passe dans des espaces de dimension supérieure à 3.

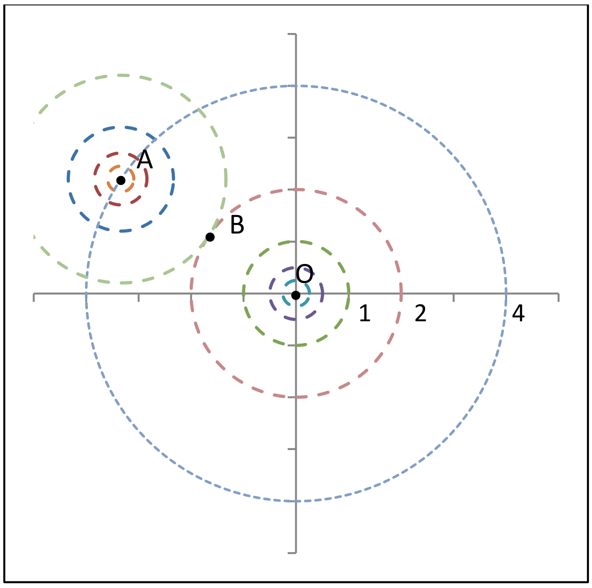


Le cas limite où la somme des deux rayons est supérieure ou égale à la distance OA est plus difficile à « voir ».

Prenons par exemple deux boules fermées de rayon 2.

Elles ne sont plus disjointes puisqu'elles ont un point commun que l'on appelle B. Mais on n'a pas l'impression visuelle qu'elles sont incluses l'une dans l'autre (confondues dans cet exemple puisqu'elles ont même rayon). Et pourtant, la démonstration du paragraphe précédent est imparable.

Nous sommes visuellement trompés par le fait que seuls les points O, A et B du plan sont associés à des nombres 2-adiques appartenant à cette boule commune.



Tous les autres points 2-adiques sont dans d'autres dimensions et sont donc impossibles à « voir ».

5 • La topologie est totalement discontinue.

Pour donner une petite idée de ce qu'est un ensemble dont la topologie est totalement discontinue je vous renvoie sur le site https://fr-academic.com/dic.nsf/frwiki/1925589. Vous y trouverez une douzaine d'exemples.

Dans le langage de tous les jours, on imagine bien que dans de tels ensembles, on n'a jamais deux « points » qui se « touchent ».

Les dessins des paragraphes précédents nous montrent (sans démontrer) que c'est bien le cas pour les nombres p-adiques.

Je n'irai pas plus loin…