VALEUR ABSOLUE ET DISTANCE

Résumé

Comme pour la valuation, nous définissons la valeur absolue p-adique d'un nombre rationnel ainsi que la valeur absolue p-adique d'un nombre p-adique.

Nous en déduisons la distance entre deux nombres rationnels.

Nous ébauchons une représentation euclidienne des nombres p-adiques.

Valeur absolue p-adique

On connait bien la valeur absolue des nombres réels : $|x| = \text{Max}(x, -x)$.

Le module d'un nombre complexe ($z = x + iy$) est aussi une valeur absolue : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Représentation usuelle

On peut définir une infinité d'autres valeurs absolues sur les nombres rationnels.

Elles utilisent leur décomposition en facteurs premiers et sont qualifiées de valeurs absolues p-adiques.

Mieux que des paroles savantes, un seul exemple suffira pour définir ces valeurs absolues.

Considérons le nombre rationnel $\frac{392}{325}$.

Sa décomposition en facteurs premiers donne : $\frac{392}{325} = \frac{2^3 \,.\, 7^2}{5^2 \,.\, 13}$

Pour les nombres premiers qui n'apparaissent pas dans cette décomposition (p = 11, et p > 13), la valeur absolue p-adique est égale à 1.

Les autres valeurs absolues, différentes de 1, sont données dans le tableau ci-dessous.

$p = 2$	$p = 5$	$p = 7$	$p = 13$
$\left\|\frac{392}{325}\right\|_2 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\left\|\frac{392}{325}\right\|_5 = 5^2 = 25$	$\left\|\frac{392}{325}\right\|_7 = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$	$\left\|\frac{392}{325}\right\|_{13} = 13$

Pour obtenir la valeur absolue pour p fixé, il suffit donc d'inverser le nombre rationnel et de garder le nombre p avec son exposant.

On peut vérifier que cette définition satisfait parfaitement toutes les propriétés d'une valeur absolue rappelées ci-dessous.

1 • $|x| = 0 \iff x = 0$

2 • $|x\,y| = |x|\,|y|$

3 • $|x + y| \leq |x| + |y|$

On peut aisément relier cette valeur absolue à la valuation définie dans « Valuation ».

De toute évidence, la valeur absolue p-adique du nombre rationnel x est : $|x| = p^{-v(x)}$.

Représentation p-adique

La définition ci-dessus s'applique aux nombres rationnels, elle est donc la même pour les nombres p-adiques, mais on peut la visualiser différemment.

On rappelle que, en base p, on a toujours $p = 10$.

La valeur absolue p-adique est donc toujours une puissance de 10.

Le tableau ci-dessous montre un échantillon de valeurs absolues 5-adiques.

Représentation usuelle (base 10)	8/3	-9/5	625	-5/8	1/100	459/24	25/7
Représentation 5-adique	**«13|21**	**«4|3,1**	**10000**	**«30|**	**«3|,34**	**«14|231**	**«241203|300**
Valuation	0	-1	4	1	-2	0	2
Valeur absolue	*1*	*10*	*0,0001*	*0,1*	*100*	*1*	*0,01*

Les nombres de valuation p-adique nulle ont une valeur absolue p-adique égale à 1 (on en trouve deux dans le tableau ci-dessus).

Pour cette raison, ils sont appelés **« unités p-adiques »**.

Une des propriétés de la valuation p-adique est $\mathrm{v}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \geq \mathrm{Min}\,(\mathrm{v}(\mathbf{a}),\mathrm{v}(\mathbf{b}))$.

On en déduit $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geq \mathrm{Max}\,(|\mathbf{a}|,|\mathbf{b}|)$.

Cette inégalité est plus « forte » que la troisième propriété de la valeur absolue (inégalité triangulaire).

On sait également que, si $\mathrm{v}(\mathbf{a}) \neq \mathrm{v}(\mathbf{b})$, alors $\mathrm{v}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{Min}\,(\mathrm{v}(\mathbf{a}),\mathrm{v}(\mathbf{b}))$.

On en déduit $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}| \Longrightarrow |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \mathrm{Max}\,(|\mathbf{a}|,|\mathbf{b}|)$.

La démonstration rigoureuse de ces relations est simple mais abstraite. On peut la vérifier concrètement en utilisant les nombres p-adiques du tableau ci-dessus.

Une valeur absolue p-adique possédant cette propriété est dite **ultramétrique**.

Distance p-adique

Définition

La définition de la valeur absolue induit presque automatiquement la définition de la **distance p-adique entre deux nombres**, ou, ce qui revient au même, la **distance entre deux nombres p-adiques** :

$\mathrm{d}(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \mathrm{p}^{-\mathrm{v}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$.

Comme pour la valeur absolue, on qualifie cette distance d'ultramétrique.

Fidèle à nos habitudes, nous essayons de visualiser cette notion de distance tout à fait inhabituelle.

x	**4241034**	**2243**	**«3|221,34**	**«3|221,34**	**«3|221,34**
y	**3011034**	**2242**	**«3|021,34**	**«3|021,32**	**«3|221,32**
x – y	**1230000**	**1**	**200**	**200,02**	**0,02**
v(**x – y**)	4	0	2	-2	-2
d(**x , y**)	0,0001	1	0,01	100	100

L'impression qui ressort est que deux nombres p-adiques sont d'autant plus « proches » que leurs chiffres à partir de la droite sont identiques. Ceci confirme que les chiffres « importants » sont ceux qui sont le plus à droite.

Répartition des « points » p-adiques par rapport à «0|

Nous essayons ici de « visualiser » la notion de distance p-adique en tentant une représentation dans un espace euclidien.

Nous utiliserons les notations habituelles de la géométrie où les points sont désignés par des lettres majuscules.

Le point O est associé au nombre p-adique **«0|.**

La distance entre un point A et le point O est : $\mathrm{d}(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{«0»}) = |\mathbf{x}| = \mathrm{OA} = \mathrm{p}^{-\mathrm{v}(\mathbf{x})}$.

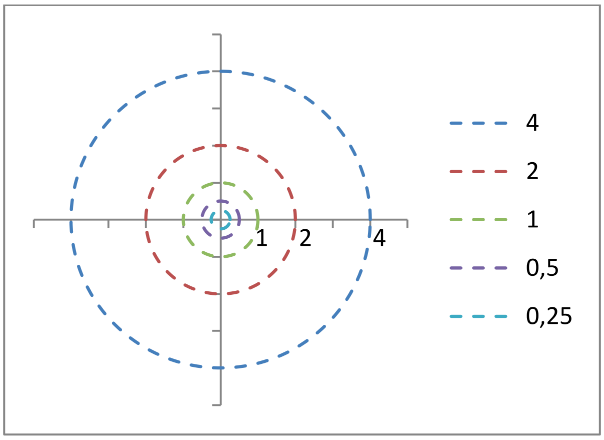
Tous les nombres ayant même valuation n sont situés sur une sphère de rayon p^n (n entier relatif).

Nous montrons ci-contre une coupe de quelques-unes de ces sphères par un plan pour les nombres 2-adiques.

Les rayons donnés à droite sont évidemment en base 10.

Les unités 2-adiques sont situées sur la sphère de rayon égal à 1.

Les éléments de $\mathbb{Z}_2$ sont sur les sphères de rayon inférieur ou égal à 1.



Tous les nombres dont la valeur absolue est supérieure à 1 appartiennent à $\mathbb{Q}_2$ mais pas à $\mathbb{Z}_2$ (ce sont des nombres à virgule).

Propriétés de cette représentation

Cet ensemble de sphères concentriques possède la propriété **d'autosimilarité** caractéristique des **structures fractales**. En effet, la multiplication par n'importe quelle puissance de 2 (positive ou négative), ou de p dans le cas général, laisse cette figure invariante.

Une autre propriété beaucoup moins évidente à visualiser est **l'invariance par translation**. En effet, quel que soit le point choisi comme origine sur une des sphères de rayon 2^n, tous les points 2-adiques se répartissent sur des sphères de rayon 2^n centrées sur ce point.

On en déduit, mais c'est absolument impossible à visualiser, que **les nombres p-adiques sont les points d'intersection d'une infinité de sphères de rayon p^n ($n \in \mathbb{Z}$) construites dans un espace euclidien de dimension infinie ! ! !**

Conclusion

Nous n'irons pas plus loin dans ce fichier.

Lors de ma vie de physicien, je n'avais jamais entendu parler de valeur absolue ultramétrique ni de distance p-adique. Pourtant, en fouinant sur Internet, j'ai trouvé une théorie des cordes faisant intervenir les nombres p-adiques. De tout temps, les maths et la physique se sont enrichis mutuellement.

Nous verrons que cette notion de distance inhabituelle est utile pour exprimer les propriétés de convergence des séries p-adiques dans une formulation qui ressemble à la formulation classique, c'est-à-dire en utilisant un rayon de convergence.

Nous développons dans « Topologie p-adique » les propriétés géométriques « curieuses » des espaces dotés d’une distance ultra métrique.