# VALUATION

**Résumé**

Nous définissons la valuation dans le cas de la représentation usuelle et de la représentation 5-adique. Nous établissons les différentes propriétés de la valuation.

A titre d'exercice, nous calculons la valuation de n !

## Définition

### En représentation usuelle

Lors de ma vie de physicien, je n'avais jamais été confronté à la notion de valuation qui est très générale et qui concerne, entre autres, les nombres rationnels et les nombres p-adiques.

Pour un nombre rationnel en représentation usuelle, elle fait intervenir la décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Par exemple, la décomposition en facteurs premiers du nombre rationnel $a = \frac{392}{325}$ donne : $a = \frac{2^3\,.\,7^2}{5^2\,.\,13} = 2^3\,.\;5^{-2}.\;7^2\,.13^{-1}$ .

**A chaque nombre premier p on associe une valuation $v_p(a)$ qui est l'exposant du nombre premier p dans la décomposition en facteurs premiers de a.**

On a donc $v_p(a) = 0$ pour p = 11 et p > 13.

Les valuations non nulles sont $v_2(a) = 3$, $v_5(a) = -2$, $v_7(a) = 2$, $v_{13}(a) = -1$.

### En représentation 5-adique

Dans « Représentation p-adique », nous avons calculé les représentations 5-adiques des nombres rationnels dont le numérateur (première ligne) et le dénominateur (première colonne) sont compris entre 2 et 10 (en base 10). Les cases bleues correspondent à des fractions simplifiables (attention, on est en base 5). Les 1 de la diagonale n'ont pas été écrits.

| | *2* | *3* | *4* | *10* | *11* | *12* | *13* | *14* | *20* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *2* | | **«2\| 4** | | **«2\| 30** | | **«2\| 31** | | **«2\| 32** | |
| *3* | **«31\| 4** | | **«13\| 3** | **«13\| 20** | | **«13\| 4** | **«13\| 21** | | **«31\| 40** |
| *4* | | **«1\| 2** | | **«3\| 40** | | **«1\| 3** | | **«3\| 41** | |
| *10* | **0,2** | **0,3** | **0,4** | | **1,1** | **1,2** | **1,3** | **1,4** | |
| *11* | | | | **«04\| 10** | | **«04\| 2** | | | |
| *12* | **«03241<br>2\| 1** | **«32412<br>0\| 4** | **«12032<br>4\| 2** | **«24120<br>3\| 30** | **«20324<br>1\| 3** | | **«24120<br>3\| 4** | **«03241<br>2\| 2** | **«03241<br>2\| 10** |
| *13* | | **«03\| 1** | | **«14\| 20** | | **«30\| 4** | | **«14\|3** | |
| *14* | **«23421<br>0\| 3** | | **«02342<br>1\| 1** | **«34210<br>2\| 40** | | **«21023<br>4\| 3** | **«10234<br>2\| 2** | | **«23421<br>0\| 30** |
| *20* | | **«2\| ,4** | | | | **«2\| 3,1** | | **«2\| 3,2** | |

Nous avons défini $\mathbb{Z}_p$ comme étant l'ensemble des nombres p-adiques sans virgule.

Nous avons également remarqué que de nombreux éléments de $\mathbb{Z}_p$ (une infinité !) étaient des nombres rationnels.

On peut ajouter une caractéristique aux nombres de ce tableau que l'on appelle la **valuation**.

**La valuation d'un nombre p-adique est égale :**
**- au nombre de zéros consécutifs à droite pour tous les nombres qui se terminent par zéro,**
**- à l'opposé du nombre de chiffres après la virgule pour les nombres à virgule,**
**- à zéro pour tous les autres.**

Par exemple : v(**«14|2000**) = 3 ; v(**«233| 41,3101**) = -4 ; v(**«303|1204**) = 0 .

Pour une définition mathématique et rigoureuse (et très ésotérique) de la valuation dans le sens le plus large possible, on peut se reporter à : http://fr.wikipedia.org/wiki/Valuation

La valuation des éléments de $\mathbb{Q}_p$ est donc un entier relatif et celle des éléments de $\mathbb{Z}_p$ est un entier naturel.

La valuation du **«0|** p-adique est habituellement postulée sans justification : v(**«0|**) = ∞. Grace à notre définition puérile de la valuation, celle du **«0|** p-adique devient naturelle. Nous avons en effet admis que le zéro p-adique était la limite de tout entier p-adique positif dont le nombre de zéros écrits à droite tendait vers l'infini.

Les nombres de valuation nulle (les plus nombreux) ont un statut particulier dans le monde des nombres p-adiques. On les appelle des **unités p-adiques** (on montre dans « Valeur absolue et distance » que leur valeur absolue p-adique est égale à 1). De toute évidence, si **a** est un nombre p-adique et **u** une unité p-adique, on peut écrire **a** = **u** x **10**$^n$ où n est un entier relatif égal à la valuation de **a**.

Visuellement, il est très simple de reconnaître et d'identifier une unité p-adique puisque, en représentation p-adique, ce nombre ne se termine pas par **0** et n'a pas de chiffre après la virgule.

## Valuation d'un produit et d'un rapport

La définition de la valuation en représentation usuelle conduit immédiatement aux propriétés suivantes :

v(**a x b**) = v(**a**) + v(**b**)

v(**a / b**) = v(**a**) – v(**b**).

v(**a**$^n$) = n v(**a**)   avec n entier relatif.

On constate que la fonction valuation présente des ressemblances avec la fonction logarithme, ce qui n'a rien d'étonnant puisqu'elle fait intervenir les exposants d'une décomposition en facteurs premiers.

On peut vérifier ces propriétés sur les exemples suivants en représentation 5-adique.

| | Val. | | Val. | | Val. |
|---|---|---|---|---|---|
| **...a 0 0 0** | 3 | **...a , b c d** | -3 | **...a , b c** | -2 |
| x **... y 0 0** | 2 | x **...y 0 0** | 2 | x **...w , x** | -1 |
| **...t 0 0 0 0 0** | 5 | **...t , u** | -1 | **...r , s t u** | -3 |

## Valuation de l'opposé d'un nombre

En représentation usuelle, le signe « moins » n'intervient pas dans la décomposition en facteur premier et la valuation de -1 est évidemment nulle.

Un nombre et son opposé ont donc la même valuation.

On constate sur quelques exemples qu'il en est de même en représentation 5-adique.

| | Val. | | Val. | | Val. |
|---|---|---|---|---|---|
| ...1 3 0 2 4 | 0 | ...1 3 0 , 2 4 | -2 | ...1 3 0 0 0 | 3 |
| + ...3 1 4 2 1 | 0 | + ...3 1 4 , 2 1 | -2 | + ...3 2 0 0 0 | 3 |
| ...0 0 0 0 0 | | ...0 0 0 | | ...0 0 0 0 0 | |

## Valuation d'une somme

### En représentation 5-adique

Examinons attentivement les exemples ci-dessous.

| | Val. | | Val. | | Val. |
|---|---|---|---|---|---|
| ...a b c 0 0 0 0 | 4 | ...a , b c d | -3 | ...a b 0 | 1 |
| + ...x y z 0 0 | 2 | + ...x , y z | -2 | + ...w x , y z | -2 |
| ...t y z 0 0 | 2 | ...s , t u d | -3 | ...s t x , y z | -2 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ...a b c 1 0 | 1 | ...a b 1 2 | 0 | ...a , b 1 | -2 |
| + ...x y 3 0 | 1 | + ...x 3 3 | 0 | + ...x , y 4 | -2 |
| ...t u 4 0 | 1 | ...t 0 0 | 2 | ...s , t | -1 |

Sans prétendre démontrer quoi que ce soit, on peut se convaincre aisément des propriétés suivantes :

Si les deux termes de la somme ont des valuations différentes, la valuation de la somme est égale à la plus petite des valuations des deux termes.

Si les deux termes de la somme ont des valuations identiques, la valuation de la somme est supérieure ou égale à cette valuation commune.

Une des propriétés qui définit une valuation dans le cas le plus général est :

$\boxed{v(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \geq \mathrm{Min}\ (v(\mathbf{a}),v(\mathbf{b})).}$

La valuation p-adique vérifie bien cette inégalité. Elle est même encore plus restrictive puisque

$\boxed{v(\mathbf{a}) \neq v(\mathbf{b}) \text{ entraine toujours } v(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{Min}\ (v(\mathbf{a}),v(\mathbf{b}))}$.

Si on associe la propriété concernant la valuation de l'opposé d'un nombre, on aura :

$v(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = v(\mathbf{a} + (-\mathbf{b})) \geq \mathrm{Min}\ (v(\mathbf{a}),v(-\mathbf{b})) = \mathrm{Min}\ (v(\mathbf{a}),v(\mathbf{b}))$.

### En représentation usuelle

La démonstration de ces propriétés est simple mais un peu laborieuse.

On commence par écrire $a = p^{v(a)}u_a$ et $b = p^{v(b)}u_b$ où $u_a$ et $u_b$ sont des unités p-adiques (voir définition ci-dessus).

Si v(a) $\neq$ v(b) et v(a) < v(b),

$$\text{alors } a + b = p^{v(a)}u_a + p^{v(b)}u_b = p^{v(a)}\left(u_a + p^{v(b)-v(a)}u_b\right).$$

Donc v(a + b) = v(a) qui donne dans le cas général v(a + b) = Min(v(a), v(b)).

Si v(a) = v(b), alors $a + b = p^{v(a)}(u_a + u_b)$.

La seule chose que l'on puisse dire de $v(u_a + u_b)$ est qu'elle est positive ou nulle.

Donc v(a + b) ≥ v(a) .

En regroupant les deux résultats, on retrouve bien v(a + b) ≥ Min(v(a), v(b)).

## Valuation de n !

### Etude empirique

A titre d'exercice, et aussi car cela nous sera utile par la suite, nous allons calculer la valuation de n ! = 1 x 2 x 3 x 4 x … x n-1 x n.

D'après notre définition de la valuation, il suffit de compter les 0 qui terminent ce nombre entier écrit en base 5.

Pour cela, nous écrivons dans le tableau ci-dessous, les premiers nombres se terminant par 0.

| | *100* | *200* | *300* | *400* | *1000* | *1100* | *1200* | *1300* | *1400* | *2000* | *2100* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *10* | *110* | *210* | *310* | *410* | *1010* | *1110* | *1210* | *1310* | *1410* | *2010* | *2110* |
| *20* | *120* | *220* | *320* | *420* | *1020* | *1120* | *1220* | *1320* | *1420* | *2020* | *2120* |
| *30* | *130* | *230* | *330* | *430* | *1030* | *1130* | *1230* | *1330* | *1430* | *2030* | *2130* |
| *40* | *140* | *240* | *340* | *440* | *1040* | *1140* | *1240* | *1340* | *1440* | *2040* | *2140* |

Dans le calcul de $n$ !, on ajoute un $0$ à chaque fois que l'on passe sur un multiple de $10$, un de plus quand on passe sur un multiple de $100$ (en rouge), encore un autre quand on passe sur un multiple de $1000$ (en bleu), etc.

Le nombre total de zéros dans $n$ ! est donc $\mathrm{Ent}(n/10) + \mathrm{Ent}(n/100) + \mathrm{Ent}(n/1000) + \ldots$

On arrête évidemment la sommation quand la puissance de $10$ au dénominateur devient supérieure à $n$.

Si on appelle m + 1 le nombre de chiffres de $n$ en base p, la valuation p-adique de $n$ ! est donnée par : $v(n\,!) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ent}\left(\frac{n}{10^i}\right)$ .

Ce résultat classique est connu sous le nom de formule de Legendre.

Calculons par exemple la valuation 5-adique de $194\,! \sim 1234\,!$

| | *10* | *100* | *1000* |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{Ent}(1234/10^i)$ | *123* | *12* | *1* |

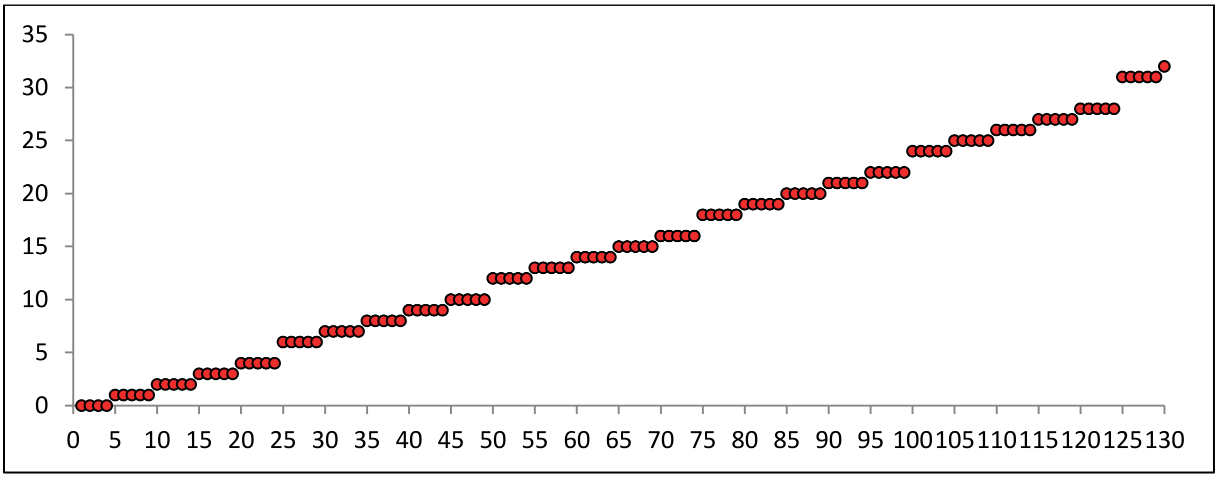
$v(1234\,!) = 123 + 12 + 1 = 141 \sim 46.$

Si on écrit l'addition ci-dessus dans l'autre sens, l'algorithme de calcul devient complètement transparent : $v(1234\,!) = 1 + 12 + 123 = 141$ .

Le dernier chiffre ne joue aucun rôle puisque la valuation de $n$ ! est la même pour $n$ compris entre $1230$ et $1234$.

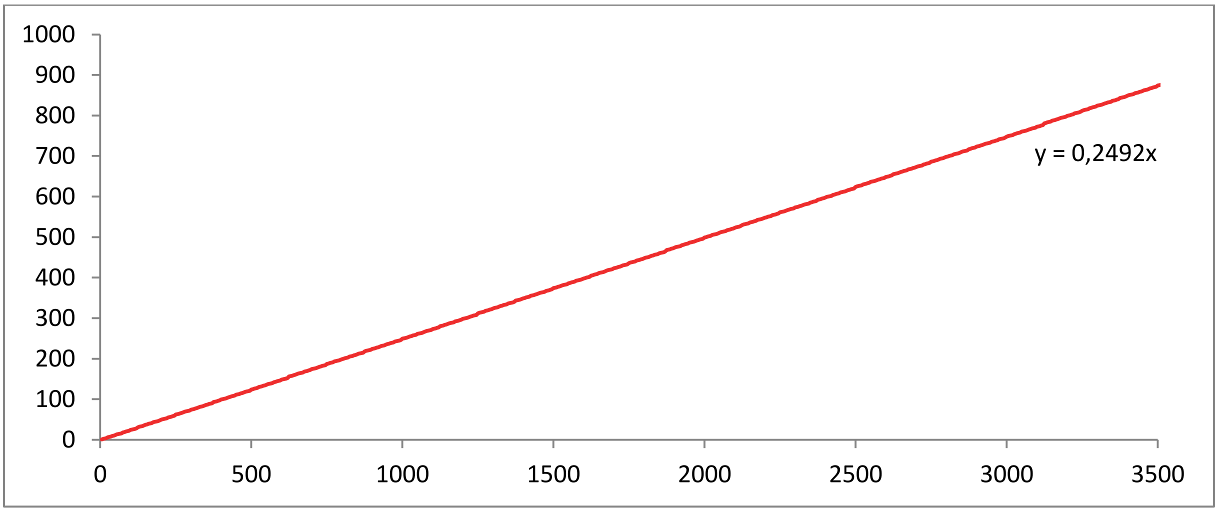
L'expression obtenue est toutefois malaisée à manipuler concrètement. Il est clair que la fonction f($n$) = v($n$ !) est croissante et qu'elle tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Mais on aimerait bien en savoir plus.

Pour y voir plus clair, nous traçons le graphe de cette fonction pour n compris entre 1 et 130.




Pas de surprise : on a une fonction en escalier avec des marches de hauteur 1 une fois sur 5, de hauteur 2 une fois sur 25, de hauteur 3 une fois sur 125, etc.

L'impression générale est celle d'une fonction affine en moyenne. Cette impression se confirme si on étend la courbe ci-dessus jusqu'à n = 3500. Les valeurs de n utilisées dans ce graphe sont des multiples de 5, c'est-à-dire que l'on garde seulement le premier point de chacune des marches du graphe ci-dessus.




On a même une pente moyenne voisine de 1/4, c'est-à-dire $1/(\mathrm{p}-1)$.

Pour creuser un peu la question, on calcule v($n$ !) pour $n = 10^k$ et $n = 10^k - 1$.

Par exemple $\mathrm{v}(10000!) = 1 + 10 + 100 + 1000$.

Cette série géométrique a pour somme $(10000 - 1)/(10 - 1)$

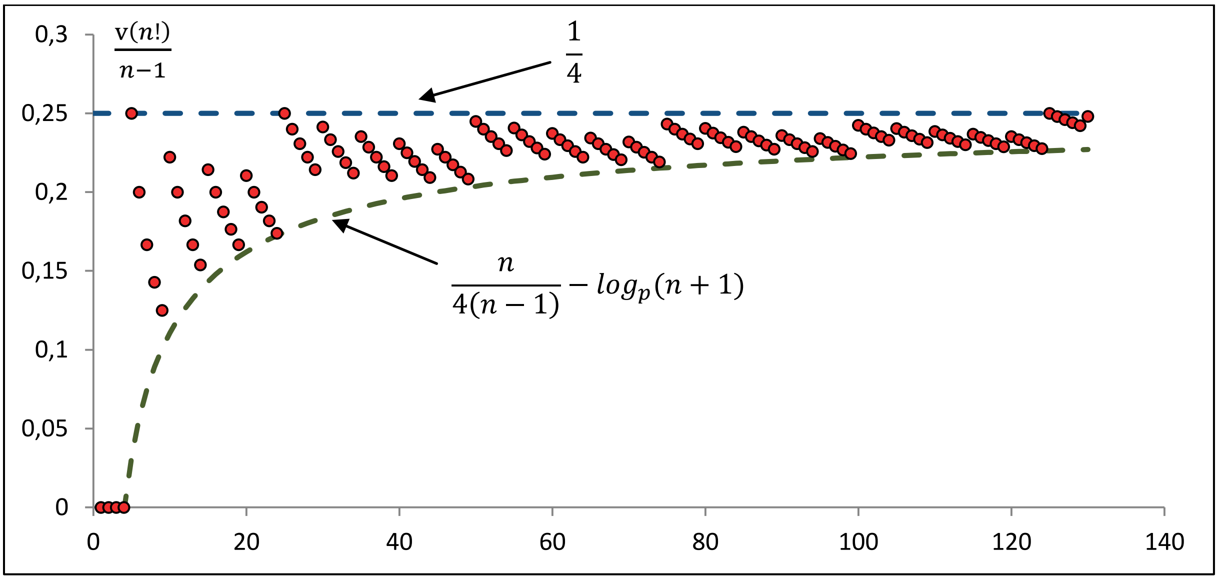
On en déduit aisément une formule générale : $\mathrm{v}(n\,!) = \frac{n-1}{p-1}$ pour $n = 10^k$.

Quand n passe de $10^k - 1 = 444\ldots444$ à $10^k = 1000\ldots000$ le nombre de zéros à la fin de n ! augmente évidemment de k.

Donc $\mathrm{v}\left((10^k - 1)!\right) = \frac{n}{p-1} - k$. Mais k est évidemment une fonction de $n$ : $k = \log_{\mathrm{p}}(n+1)$.

$\mathrm{v}(n\,!) = \frac{n}{p-1} - log_p(n+1)$ pour $n = 10^k - 1$.

On peut vérifier graphiquement que ces deux formules constituent un « encadrement » de toutes les valeurs de $\mathrm{v}(n\,!)$.




Donc : $\frac{n}{p-1} - log_p(n+1) \leq \mathrm{v}(n!) \leq \frac{n-1}{p-1}$.

En fait, le résultat rigoureux, quel que soit n, est $\mathrm{v}(n\,!) = \frac{\mathrm{n}-\mathrm{S(n)}}{\mathrm{p}-1}$ où S(n) est la somme des chiffres du nombre n écrit en base p. On peut trouver une démonstration de ce résultat dans :

http://www.normalesup.org/~sage/Colles/AlgComm/Arith.pdf

Mais l'essentiel du résultat est que $\mathrm{v}(n\,!)$ croit comme $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{p}-1}$, donc moins vite que n, quand n est suffisamment grand.

**Cas particulier p = 2**

Dans ce cas, $\mathrm{p} - 1 = 1$, donc $\mathrm{v}(n\,!) = \mathrm{n} - \mathrm{S(n)}$.

Quand $n$ est compris entre $2^{k-1}$ et $2^k - 1$, le nombre de chiffres de $n$ est égal à k. La somme S(n) est donc comprise entre 1 (quand $n = 2^{k-1}$) et k = $\log_2(n+1)$ quand $n = 2^k - 1$.

Donc $\frac{S(n)}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et donc, dans ce cas, $\mathrm{v}(n\,!)$ croit comme n, quand n est suffisamment grand.

## Conclusion

La valuation n'est qu'une étape dans notre démarche pédagogique.

Elle n'est pas spécifique des nombres p-adiques.

Elle nous sera utile pour définir la valeur absolue et la distance p-adiques, notions qui s'appliquent aussi bien aux nombres « usuels » qu'aux nombres p-adiques.

Le calcul de la valuation de n! nous sera utile dans « Exponentielle et Logarithme p-adiques ».