CHANGEMENT DE REPRÉSENTATION
ET SIGNE D'UN NOMBRE p-ADIQUE

Changement de représentation

Afin d'avoir une vision aussi concrète que possible des nombres p-adiques, on indique ici comment passer d'un nombre appartenant à $\mathbb{Z}_p$ (nombre p-adique sans virgule) mais pas à $\mathbb{Z}$ (entier relatif). Le résultat sera, de toute évidence, un nombre rationnel.

Commençons avec le nombre totalement périodique **«14|**

On peut écrire **«14| = «14|00 + 14 = 100 x «14| + 14.** Le nombre **«14|** est donc solution de l'équation **X = 100 X + 14.**

En base 5, cette équation s'écrit $X = \mathit{100}\ X + \mathit{14}$ et en base 10 elle devient X = 25 X + 9.

X = –9/24. On a donc : **«14|** ~ –9/24.

De façon générale, si **«a|** est un nombre p-adique totalement périodique et de période n, alors la fraction correspondante en représentation usuelle et en base 10 est $\frac{a}{1-p^n}$ où le nombre entier a est la valeur en base 10 de *a*.

Par exemple, pour le nombre p-adique **«123|,** on a **123** ~ *123* ~ 38. La période est n = 3. Donc $1 - p^n = 1 - 5^3 = -124$. En conclusion, **«123|** ~ –38/124 = –19/62.

On remarque en passant qu'un **nombre p-adique totalement périodique** est toujours un **nombre rationnel négatif** en représentation usuelle.

Pour compléter, on doit chercher maintenant la représentation d'un nombre sans virgule quelconque, par exemple **«14|231**

On utilise la relation **«14|231 = «14|000 + 231 = 1000 x «14| + 231**

Or **1000** ~ *1000* ~ 125, **«14|** ~ –9/24 et **231** ~ 66

Donc **«14|231** ~ 125 x (-9 /24) + 66 = 459/24 .

En conclusion :

Si *a* est un entier à n chiffres et *b* un entier à m chiffres (en base p), alors l'expression donnant la représentation usuelle en base 10 du nombre rationnel p-adique **«a| b** est $a\frac{p^m}{1-p^n} + b$.

Signe d'un nombre rationnel en représentation 5-adique

On utilise le résultat obtenu au paragraphe précédent pour déterminer simplement le signe d'un nombre rationnel en représentation 5-adique.

On commence par écrire le nombre sous une forme telle que la partie périodique ait le même nombre de chiffres que la partie non périodique de droite.

Par exemple : **«14| 3 = «41| 43** **«21| 341 = «121212| 121341**

De façon générale, si n est la période de la partie périodique du nombre rationnel **«a'| b'** et m le nombre de chiffres de *b'*, on peut toujours écrire ce nombre sous la forme **«a| b** où a et b sont deux blocs ayant pour longueur le plus petit commun multiple de n et m.

Le résultat obtenu au paragraphe précédent donne alors **«a| b** $\sim a\frac{p^q}{1-p^q}+b$.

Si on triture un peu, ce résultat se met sous la forme **«a| b** $\sim \frac{(b-a)\,p^q - b}{p^q-1}$.

q étant toujours supérieur ou égal à 1, le dénominateur est toujours positif.

Il reste donc à déterminer le signe de $(b-a)p^q - b$.

a et b étant des entiers strictement inférieurs à p^q, on montre aisément que cette expression est positive si b > a et négative si b $\leq$ a.

En conclusion :

Tout nombre rationnel ayant pour représentation p-adique **«a'| b'** peut s'écrire sous la forme **«a| b** où a et b sont deux entiers de même longueur (en base p). Ce nombre est positif si et seulement si b > a.

Pour vérifier, on reprend le nombre **«14|231 =«4141|4231**. *4231* est supérieur à *4141* et le nombre est bien positif.

Ce calcul permet de comparer, en déterminant le signe de leur différence, deux nombres rationnels en représentation p-adique, ce qui n'est pas évident visuellement, alors que ça l'est en représentation usuelle.