

EXPONENTIELLE ET LOGARITHME p-ADIQUES

Résumé

Les fonctions exponentielle et logarithme d'un nombre p-adique sont nécessaires pour calculer concrètement une des solutions de l'équation $x^{n/m} = a$

Nous établissons ici les conditions d'existence de ces deux fonctions quand l'argument est un nombre p-adique.

Introduction

Le fichier « Puissances fractionnaires p-adiques » nous oblige à examiner les fonctions logarithme et exponentielle quand l'argument de la fonction est un nombre p-adique.

Il est utile d'avoir lu les annexes « Valuation » et « Valeur absolue et distance » avant de continuer.

Il est également indispensable d'avoir lu le fichier « Convergence des séries » dont on rappelle le résultat essentiel :

Une série p-adique est convergente si et seulement si son terme général a_n tend vers «0» quand n tend vers l'infini.

Une condition équivalente portant sur la valuation est plus concrète à manipuler : une série p-adique est convergente si et seulement la valuation de a_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Fonction exponentielle

Elle est définie par $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ et on sait que cette série converge quel que soit x réel ou complexe quand on est en représentation usuelle.

On utilise la même série pour la fonction exponentielle p-adique : $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Cette série p-adique converge si et seulement si la valuation de $\frac{x^n}{n!}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

D'après les propriétés de la valuation, on a : $v\left(\frac{x^n}{n!}\right) = nv(x) - v(n!)$.

On a vu dans « Valuation » que $v(n!) \leq \frac{n-1}{p-1}$ donc $v\left(\frac{x^n}{n!}\right) \geq nv(x) - \frac{n-1}{p-1}$.

$$v\left(\frac{x^n}{n!}\right) \geq \left(v(x) - \frac{1}{p-1}\right)n + \frac{1}{p-1}.$$

La valuation de $\frac{x^n}{n!}$ est supérieure à une fonction affine de n dont le coefficient directeur est $v(x) - \frac{1}{p-1}$.

Cette valuation tend vers l'infini quand n tend vers l'infini si et seulement si $v(\mathbf{x}) - \frac{1}{p-1}$ est strictement positif.

$v(\mathbf{x})$ étant un entier relatif on constate que, si p n'est pas égal à 2, il suffit que $v(\mathbf{x})$ soit supérieur ou égal à 1 pour assurer la convergence, c'est-à-dire que $\mathbf{x}$ soit un multiple de $\mathbf{p}$, donc, enfin, que $\mathbf{x}$ se termine par **0**.

Dans le cas particulier où p est égal à 2, il faut que $v(\mathbf{x})$ soit supérieur ou égal à 2 pour assurer la convergence, donc que $\mathbf{x}$ se termine par **0 0**.

Donc l'exponentielle d'un nombre p-adique existe quand ce nombre se termine par 0 (ou par 0 0 quand $p = 2$).

La valeur de l'exponentielle est une unité p-adique qui se termine par 1.

Pour le plaisir, on calcule le nombre 5-adique $\exp(5) \sim \exp(\mathbf{10})$

$$\exp(\mathbf{10}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} = \mathbf{1} + \mathbf{10} + \frac{100}{2} + \frac{1000}{11} + \frac{10000}{44} + \frac{100000}{440} + \dots$$

On calcule les 6 premiers chiffres.

On utilise le tableau des inverses obtenu dans « Représentation p-adique... »

Base 5	1/2	1/3	1/4	1/10	1/11	1/12	1/13	1/14	1/20
Rep. 5-adique	«2 3	«13 2	«3 4	0,1	«04 1	«241203 3	«14 2	«342102 4	«2 ,3

$$1/2 \sim \mathbf{«2|3} \text{ donc } 100/2 \sim \mathbf{«2|300.}$$

$$1/11 \sim \mathbf{«04|1} \text{ donc } 1000/11 \sim \mathbf{«04|1000.}$$

On multiplie ce résultat par $10/4 \sim \mathbf{«3|40}$ pour obtenir $10000/44 \sim \mathbf{«04|1000.}$

$$\text{Et on remarque que } 100000/440 = 10000/44$$

1	0 0 0 0 0 1
10	0 0 0 0 1 0
100/2	... 2 2 2 3 0 0
1000/11	... 4 0 1 0 0 0
10000/44	... 4 1 0 0 0 0
100000/440	... 4 1 0 0 0 0
	... 4 4 3 3 1 1

Ce résultat numérique n'a évidemment aucun intérêt et je ne suis même pas absolument certain qu'il soit exact car il est facile de faire des erreurs dans ce genre de manipulations !

Fonction logarithme

La fonction logarithme usuelle est, par définition, la fonction réciproque de l'exponentielle. Elle est donc définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Elle est également définie par la série suivante : $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Mais cette série converge seulement pour $x \in]-1, 1[$.

Tentons les deux approches.

Fonction réciproque

Le résultat essentiel du paragraphe précédent tient dans la phrase suivante.

L'exponentielle d'un nombre p-adique existe si et seulement si ce nombre se termine par 0 (ou par 0 0 quand $p = 2$).

La valeur de l'exponentielle est une unité p-adique qui se termine par 1.

La « réciproque » de cette phrase est :

Le logarithme d'un nombre p-adique existe si et seulement si ce nombre est une unité p-adique qui se termine par 1.

Le logarithme de ce nombre se termine par 0 (ou par 0 0 quand p = 2).

Série

Voyons si l'étude de la convergence de la série p-adique conduit au même résultat.

Le signe moins n'existant pas dans le monde p-adique, on remplace -1 par «p-1| (une suite infinie de 4 en représentation 5-adique).

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{«p-1|}^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Cette série p-adique converge si et seulement si la valuation de $a_n = \text{«p-1|}^{n+1} \frac{x^n}{n}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

$$v(a_n) = (n-1)v(\text{«p-1|}) + nv(x) - v(n)$$

La valuation de «p-1| est nulle. Donc $v(a_n) = nv(x) - v(n)$

Pas de problème avec la valuation de n qui est nulle sauf quand n est un multiple d'une puissance de p, c'est-à-dire quand il se termine par un ou plusieurs zéros.

Mais on a toujours $v(n) \leq \log_p(n)$.

Le terme $nv(x)$ augmente plus vite que $\log_p(n)$ dès que $v(x)$ est strictement positif.

Mais la valuation est un nombre entier. La série qui définit la fonction logarithme converge donc dès que $v(x)$ est supérieur ou égal à 1, c'est-à-dire quand x se termine par un ou plusieurs zéros.

L'argument du logarithme étant $1+x$, on aboutit à la même conclusion que précédemment :

Le logarithme d'un nombre p-adique existe si et seulement si ce nombre est une unité p-adique qui se termine par 1.

La valeur du logarithme se termine toujours par 0 (ou par 0 0 quand p = 2).

Pour le « plaisir », on calcule le logarithme 5-adique de $6 \sim 11$

$$\ln(11) = \ln(1+10) = \sum_{n=1}^{\infty} (\text{«4|})^{n+1} \frac{10^n}{n}$$

$$\ln(11) = 10 + \text{«4|} \frac{100}{2} + \frac{1000}{3} + \text{«4|} \frac{10000}{4} + \frac{100000}{10} + \text{«4|} \frac{1000000}{11} + \dots$$

Un certain nombre de simplifications sont triviales :

$$\text{«4|}/_2 = \text{«2|} \quad \text{«4|}/_4 = \text{«1|} \quad 100000/_10 = 10000.$$

«4|/_11 l'est un peu moins mais on se convaincra facilement que «4|/_11 = «04| en multipliant «04| par 11.

Il reste le troisième terme $\frac{1000}{3}$.

Mais on sait (voir page précédente) que $\frac{1}{3} = \text{«13|2}$ donc $\frac{1000}{3} = \text{«13|2000}$

$$\text{Donc : } \ln(11) = 10 + \text{«2|00} + \text{«13|2000} + \text{«1|0000} + 10000 + \text{«04|000000}$$

Addition en gardant les 6 chiffres de droite.

Comme pour l'exponentielle, ce calcul numérique n'a absolument aucun intérêt.

Terme

1	... 0 0 0 0 1 0
2	... 2 2 2 2 0 0
3	... 1 3 2 0 0 0
4	... 1 1 0 0 0 0
5	... 0 1 0 0 0 0
	... 0 2 4 2 1 0

Autres essais

Pour tenter de vérifier mes calculs, j'ai essayé de calculer $\ln(\exp(\mathbf{10}))$ qui, en toute logique, devrait être égal à **10**.

J'ai calculé précédemment $\exp(\mathbf{10}) = \dots \mathbf{4\ 4\ 3\ 3\ 1\ 1}$.

Mais quand je calcule avec la série $\ln(1 + \dots \mathbf{4\ 4\ 3\ 3\ 1\ 0})$, je n'aboutis pas à **10** !!!

Je dois donc faire une erreur quelque part... Mais je n'ai pas de calculette p-adique !

J'ai également tenté de calculer la racine carrée de $6 \sim \mathbf{11}$ en passant par les puissances fractionnaires : $\mathbf{11}^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(\mathbf{11})\right)$ puisqu'on a déjà calculé cette valeur dans « Puissances fractionnaires » et qui vaut $\dots \mathbf{1\ 2\ 4\ 0\ 3\ 1}$. Nouvel échec !

Je n'irai donc pas plus loin dans ces calculs inutiles.

Résumé savant des résultats précédents

J'emprunte ici les mots de Bruno Winckler dont j'ai déjà eu l'occasion de parler.

La fonction exponentielle est une application de $p\mathbb{Z}_p$ dans $1 + \mathbb{Z}_p$ (ou de $4\mathbb{Z}_2$ dans $1 + \mathbb{Z}_2$ quand $p = 2$).

La fonction logarithme est une application de $1 + p\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ (ou de $1 + \mathbb{Z}_2$ dans $4\mathbb{Z}_2$ quand $p = 2$).

Ces fonctions sont des inverses mutuels ou des fonctions réciproques l'une de l'autre.

En fait, on peut définir ces fonctions de façon plus large mais nous n'avons besoin ici que de ces définitions.