REPRÉSENTATION p-ADIQUE
DES NOMBRES RATIONNELS

Résumé

La décision de supprimer le signe « moins » pour caractériser les nombres négatifs nous conduit à représenter les entiers négatifs puis les nombres rationnels d'une façon particulière que nous appelons **représentation p-adique**.
Pour p = 5, nous explicitons concrètement, avec de nombreux exemples, les règles de la somme, du produit et de la division des nombres en représentation 5-adique.

Objectif

Les nombres entiers ($\mathbb{N}$) sont bien connus de tous. Pour les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$), il faut ajouter le signe moins. Un nombre rationnel ($\mathbb{Q}$) est le rapport entre deux entiers relatifs (une fraction). Nous avons l'habitude du système de numération en base 10 mais nous utiliserons d'autres bases de numération. Si vous n'êtes pas familier avec ces autres bases, allez faire un tour sur Internet.

Nous ne sortirons pas de ce cadre dans ce fichier.

Je vais tenter d'entrainer le lecteur dans une sorte de jeu de piste. Chaque « découverte » peut ou doit amener un nouveau questionnement et donc un nouvel objectif.

La première question que l'on se pose est de savoir si on peut **représenter les nombres entiers négatifs sans utiliser le signe « moins »**. Pourquoi ? Pourquoi pas !

Si on trouve, cette représentation sera appelée représentation p-adique des entiers négatifs. La lettre **p représente un nombre premier** mais il est trop tôt pour justifier cette contrainte.

Nous ferons donc la différence entre la **représentation usuelle** (avec un signe « moins ») et la **représentation p-adique**.

Pour rendre les choses plus concrètes, nous montrerons des exemples avec p = 5. Nous serons donc amenés à « calculer » dans cette base de numération, ce qui n'est pas trop compliqué.

Nombre entier strictement positif

Définition arbitraire

Les entiers strictement positifs s'écrivent de la même façon en représentation usuelle (en base p) et en représentation p-adique.

Par exemple, le nombre 39 en base 10 ($3 \times 10^1 + 9 \times 10^0$) s'écrit *124* en base 5 : $\mathit{1} \times 5^2 + \mathit{2} \times 5^1 + \mathit{4} \times 5^0$.

Pour éviter les confusions, les représentations en base 5 seront toujours écrites en *garamond italique* (*124*), les représentions 5-adiques seront écrites en **arial gras** et la représentation décimale usuelle en Calibri, la fonte utilisée pour le texte.

Le nombre décimal 39 a pour représentation *124* en base 5 et **124** en représentation 5-adique.

Pour éviter toute ambigüité, nous n'écrirons jamais d'égalité entre deux représentations différentes d'un même nombre. Nous utiliserons le tilde ~ pour signifier que l'on passe d'une représentation à une autre : 39 $\sim$ *124* $\sim$ **124 .**

Mais la représentation 7-adique de 39 n'est évidemment pas la même et on a 39 $\sim$ *54* $\sim$ **54**.

Il faudrait donc préciser à chaque fois la valeur de p utilisée. Nous ne le ferons pas car nous utiliserons quasi exclusivement p = 5 pour nos exemples.

Somme et produit

Les règles de **la somme et du produit des entiers strictement positifs en représentation 5-adique** sont les mêmes qu'en base 5.

Exemple de somme :

324
+ 414
1 243

Exemple de produit :

1 2 4
x 4 3
4 3 2
1 1 1 1
1 2 0 4 2

Représentation 5-adique d'un entier négatif

Comme il a été dit précédemment, on souhaite supprimer le signe « moins » en représentation 5-adique. On doit donc trouver une solution nouvelle pour représenter les entiers négatifs, cohérente avec les définitions précédentes.

Si on trouve une représentation p-adique de –1, la règle du produit étendue à l'ensemble des entiers nous permettra d'engendrer tous les entiers négatifs en représentation p-adique.

Soit **X** la représentation 5-adique de -1. On peut écrire les deux relations suivantes :

Représentation usuelle en base 5 :	$-1\ \ +1=0$
Représentation 5-adique :	**X + 1 = 0**

Le zéro (*0*) en base 5 est évidemment le zéro habituel, élément neutre de l'addition, mais le zéro 5-adique (**0**) nous est encore inconnu puisque le paragraphe précédent ne parlait que des entiers strictement positifs.

Tentons la manœuvre suivante :

Le premier nombre est constitué d'une infinité de 4 !

...4 4 4 4 4 4 4 4 4
+ 1
...0 0 0 0 0 0 0 0 0

Quand on effectue l'addition ci-dessus, il reste évidemment une retenue de 1 qui se propage à l'infini à gauche.

Cette tentative, apparemment réussie, nous oblige à admettre deux choses qui sont complètement aberrantes dans la représentation usuelle des nombres entiers.

1 • La représentation p-adique d'un nombre peut comporter une infinité de chiffres vers la gauche (un tel nombre est évidemment infini en représentation usuelle !).

2 • Le zéro p-adique est la limite de tout entier p-adique positif dont le nombre de zéros écrits à droite tend vers l'infini (un tel nombre est également infini en représentation usuelle !).

La pilule est un peu dure à avaler. Le prix à payer pour faire disparaître le signe « moins » est d'accepter de représenter les nombres entiers négatifs par une infinité de chiffres et d'admettre l'existence d'un zéro un peu particulier. Néanmoins, l'objectif est atteint.

Le lecteur doit bien sentir dès maintenant que nous entrons dans un monde étrange ou presque rien ne se passe comme dans le monde des nombres « ordinaires ».

Pour alléger l'écriture de ces nombres ayant une infinité de chiffres, nous écrirons fréquemment **«4|** au lieu de **…4 4 4 4 4 4 4 4 4.**

Nous écrirons également **«0|** au lieu de **0** ne serait-ce que pour bien souligner la **nature spécifique du zéro p-adique**.

Pour une valeur quelconque de p, on a toujours : *–1* ~ **«p – 1|**.

Afin de se « rassurer », on peut vérifier que $-1^2 = 1$.

… 4 4 4 4 4 4
x … 4 4 4 4 4 4
… 4 4 4 4 4 1
… 4 4 4 4 1
… 4 4 4 1
… 4 4 1
… 4 1
… 1
… 0 0 0 0 0 1

Ça marche !

Les autres nombres entiers négatifs se trouvent en utilisant la somme ou le produit.

Exemples :

–2 ~ **2 x «4| = «4| 3**

…4 4 4 4 4 4 4 4 4
x 2
…4 4 4 4 4 4 4 4 3

–3 ~ **3 x «4| = «4| 2**

…4 4 4 4 4 4 4 4 4
x 3
…4 4 4 4 4 4 4 4 2

On peut procéder de façon plus générale en partant de la remarque suivante.

Soit **b** le nombre obtenu en remplaçant chaque chiffre d'un nombre entier **a** par son complément à $p - 1$.

Par exemple, 39 ~ *124* ~ **a = 124** . Alors **b = «4| 320** .

On a évidemment **a + b = «4|** donc **–a = b – «4|** .

On en déduit aisément **–a = b + 1** .

Le nombre –39 a donc pour représentation 5-adique **«4| 321**.

Vérification :

124
+ «4| 321
«0| 000

En représentation 5-adique, tous les nombres entiers négatifs ont une infinité de 4 à gauche.

Notre objectif est donc atteint. On peut représenter de façon cohérente des nombres entiers négatifs sans utiliser le signe « moins ».

Mais la forme particulière des nombres p-adiques négatifs va nous entrainer naturellement vers d'autres aventures.

Inverse d’un entier relatif

Décomposition de «4| en produit de facteurs

A partir de ce que l’on sait déjà, il est naturel d’écrire **«4| = 2 x «2|** et **«4| = 4 x «1|**

On se demande maintenant quels sont les nombres dont les représentations 5-adiques sont **«2|** et **«1|** ?

Les relations correspondantes en base 5 sont :	$-1 = 2 \times -1/2$	et	$-1 = 4 \times -1/4$
On déduit :	$-1/2 \sim$ **«2|**	et	$-1/4 \sim$ **«1|**

Nous voilà entrainés, un peu malgré nous, vers la représentation p-adique de certains nombres rationnels.

En prenant l’opposé de ces deux égalités, on obtient : $1/2 \sim$ **«2| 3** $1/4 \sim$ **«3| 4**

Ce genre d’intuition ne nous mènera pas beaucoup plus loin et on doit maintenant trouver un algorithme général qui donne le résultat obtenu pour ces cas particuliers et qui permet de calculer l’inverse de n’importe quel entier relatif.

Algorithme

L’algorithme à utiliser est ébauché ici avec le calcul de 1/4.

On cherche **A** tel que **A x 4 = 1.**

On pose **A = $(\ldots a_i \ldots a_2 a_1 a_0)$** où les **$a_i$** sont les chiffres inconnus du nombre **A**.

On écrit l’opération :

$$\begin{array}{r} (\ldots a_i \ldots a_2 a_1 a_0) \\ \times\, 4 \\ \hline 1 \end{array}$$

Le produit s’effectuant comme en base 5, on en déduit que $4\ a_0$ se termine par 1 et donc, en utilisant la fonction « modulo », que $4\ a_0 = 1\ (mod\ 5)$

On rappelle donc ci-dessous la table de multiplication des entiers modulo 5 qui s’obtient en gardant le dernier chiffre à droite du produit en base 5. On en déduit la table de division qui en découle (ça peut toujours servir).

Table de multiplication

x	0	1	2	3	4
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
2	**0**	**2**	**4**	**1**	**3**
3	**0**	**3**	**1**	**4**	**2**
4	**0**	**4**	**3**	**2**	**1**

La première colonne de la table de division a été supprimée car il n’y a pas de diviseur de 0.

Table de division

/		1	2	3	4
0		**0**	**0**	**0**	**0**
1		**1**	**3**	**2**	**4**
2		**2**	**1**	**4**	**3**
3		**3**	**4**	**1**	**2**
4		**4**	**2**	**3**	**1**

> C’est à ce niveau que nous justifions **l’obligation que p soit premier.** En effet, dans ce cas et dans ce cas seulement, les colonnes de la table de multiplication ci-dessus (sauf la première) contiennent une fois et une seule tous les chiffres de 0 à p-1.

L’équation $4\ a_0 = 1\ (mod\ 5)$ a donc une solution et une seule : $a_0 = 4$.

On transforme l’égalité **$(\ldots a_i \ldots a_2 a_1\ 4)$ x 4 = 1**

en remplaçant **$(\ldots a_i \ldots a_2 a_1\ 4)$** par **$(\ldots a_i \ldots a_2 a_1\ 0) + 4$**

En développant la multiplication par 4, on obtient **$(\ldots a_i \ldots a_2 a_1\ 0) \times 4 + 31 = 1$**

On retranche **1** aux deux membres et on factorise le **10** :

$10 \times (\ldots a_i \ldots a_2 a_1) \times 4 + 30 = 10 \times ((\ldots a_i \ldots a_2 a_1) \times 4 + 3) = 0$.

Donc **$(\ldots a_i \ldots a_2 a_1) \times 4 + 3 = 0$** . Ou encore **$(\ldots a_i \ldots a_2 a_1) \times 4 =$ «4| 2** .

On est ramené au problème précédent avec **«4| 2** dans le second membre.

$4\ a_1 = 2\ (mod\ 5)$ a pour solution $a_1 = 3$.

En continuant le processus, on constate rapidement que les chiffres suivants sont tous des 3 : $1/4 \sim$ **«3| 4**.

Vérification :

… 3 3 3 3 3 3 4
x 4
… 0 0 0 0 0 0 1

Là encore, on a une retenue qui se propage vers la gauche à l'infini mais le résultat du calcul ci-dessus peut s'écrire **«0| + 1** c'est-à-dire **1.**

Comme pour les nombres négatifs, le statut particulier du **zéro p-adique** nous permet d'obtenir un résultat cohérent pour le calcul des inverses.

La technique générale de division de deux entiers est donnée en annexe (A1 Technique de division) dans un diaporama Power Point en annexe.

Inverse des multiples de p

Il est clair que, en base p et en représentation usuelle, on a toujours $p = 10$ quel que soit p.

Si on utilise la méthode précédente pour trouver la représentation de $1/p$, on aboutit à une impasse.

En effet, l'équation $10\ a_0 = 1\ (mod\ 10)$ n'a pas de solution puisque $10 = 0\ (mod\ 10)$.

$(\ldots a_i \ldots a_2 a_1 a_0)$
x 10
1

Nous utilisons alors un subterfuge utilisé également en représentation usuelle qui est celui du nombre à virgule.

On admet arbitrairement que les inverses des puissances de p ont, comme les entiers strictement positifs, des représentations usuelles et p-adiques identiques.

$1/10 \sim$ **0,1** $\quad$ $1/100 \sim$ **0,01** $\quad$ $1/1000 \sim$ **0,001 …**

On doit cependant prendre une précaution importante pour éviter d'aboutir à une contradiction.

En effet, la limite de $1/10^n$ quand n tend vers l'infini est évidemment 0. Mais le nombre p-adique à virgule correspondant n'est pas le **«0|** défini précédemment.

On doit donc s'interdire cette limite, c'est-à-dire imposer aux nombres p-adiques d'avoir un **nombre fini de chiffres après la virgule**.

On constate en passant que les deux représentations présentent une forme de symétrie :

La représentation usuelle d'un nombre rationnel possède un nombre **fini** de chiffres **avant** la virgule et un nombre éventuellement **infini après**.

La représentation p-adique d'un nombre rationnel possède un nombre éventuellement **infini** de chiffres **avant** la virgule et un nombre **fini après**.

On peut en déduire que les chiffres « importants » en représentation p-adiques sont les chiffres de droite puisque dans la représentation usuelle ce sont ceux de gauche. Ce constat permet de faciliter certaines intuitions.

Pour obtenir les inverses des autres multiples de p, il suffit d'appliquer les règles usuelles de la multiplication.

Par exemple : $1/2 \sim$ **«2| 3** entraîne $1/20 \sim$ **«2| ,3** et $1/200 \sim$ **«2| ,23** .

Exemples d'inverses d'entiers relatifs

Représentation 5-adique des inverses des entiers compris entre -10 et +10 (sauf 0).

Base 5	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/10$	$1/11$	$1/12$	$1/13$	$1/14$	$1/20$
Rep. 5-adique	**«2| 3**	**«13| 2**	**«3| 4**	**0,1**	**«04| 1**	**«241203| 3**	**«14| 2**	**«342102| 4**	**«2| ,3**
Base 5	$-1/2$	$-1/3$	$-1/4$	$-1/10$	$-1/11$	$-1/12$	$-1/13$	$-1/14$	$-1/20$
Rep. 5-adique	**«2|**	**«13|**	**«1|**	**«4| ,4**	**«04|**	**«032412|**	**«03|**	**«023421|**	**«2|,2**

Les chiffres de la représentation p-adique des nombres rationnels, comme ceux de la représentation usuelle, montrent une périodicité. Périodicité à gauche à partir d'un certain rang pour la représentation p-adique, à droite à partir d'un certain rang pour la représentation usuelle. On utilise encore la notation **«abcd|** pour représenter la suite périodique **abcdabcdabcd**…

On remarque que les inverses des entiers négatifs ont une représentation 5-adique totalement périodique (mais la réciproque n'est pas vraie). Ceci n'a rien d'étonnant puisque $1/(-n) = -1/n$ et que $-1 \sim$ **«4|** est totalement périodique.

Représentation p-adique d'un nombre rationnel

Calculs

L'algorithme du produit et celui du calcul de l'inverse d'un entier relatif nous permettent de calculer tout nombre rationnel. On peut aussi utiliser la technique de division donnée en annexe.

Nous donnons ci-dessous les représentations 5-adiques des nombres rationnels dont le numérateur et le dénominateur sont compris entre 2 et 10 (en base 10).

Précisons que tous ces calculs n'ont aucun intérêt théorique ni aucune application pratique.

Les cases bleues correspondent à des fractions simplifiables (attention, on est en base 5). Les 1 de la diagonale n'ont pas été écrits. Les numérateurs sont sur la première ligne et les dénominateurs sur la première colonne.

	2	*3*	*4*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*20*
2		**«2| 4**		**«2| 30**		**«2| 31**		**«2| 32**	
3	**«31| 4**		**«13| 3**	**«13| 20**		**«13| 4**	**«13| 21**		**«31| 40**
4		**«1| 2**		**«3| 40**		**«1| 3**		**«3| 41**	
10	**0,2**	**0,3**	**0,4**		**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	
11				**«04| 10**		**«04| 2**			
12	**«032412| 1**	**«324120| 4**	**«120324| 2**	**«241203| 30**	**«203241| 3**		**«241203| 4**	**«032412| 2**	**«032412| 10**
13		**«03| 1**		**«14| 20**		**«30| 4**		**«14|3**	
14	**«234210| 3**		**«023421| 1**	**«342102| 40**		**«210234| 3**	**«102342| 2**		**«234210| 30**
20		**«2| ,4**				**«2| 3,1**		**«2| 3,2**	

Les nombres à virgule sont dans les cases roses. Les nombres qui se terminent par **0**, donc les multiples de p, sont dans les colonnes jaunes.

Nous appelons $\mathbb{Z}_5$ l'ensemble des nombres engendrés de cette façon ($\mathbb{Z}_p$ dans le cas général)

Nombres p-adiques

Avant de conclure, nous allons abandonner l'expression « représentation p-adique d'un nombre » et passer à la notion de nombre p-adique.

Il est temps également d'utiliser les notations traditionnelles des mathématiciens pour désigner les différents ensembles de nombres.

Les nombres manipulés dans ce fichier appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et à celui des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

On rappelle que $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$.

Les notations utilisées pour les ensembles de nombres p-adiques sont $\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Q}_p$.

Il existe évidemment une infinité d'ensembles $\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Q}_p$ (un pour chaque nombre premier p).

La « définition » de l'ensemble $\mathbb{Z}_p$ est d'une simplicité remarquable : pour p fixé,

$\mathbb{Z}_p$ est l'ensemble des nombres p-adiques sans virgule

L'inconvénient pédagogique de cette définition naturelle est qu'elle déplace la frontière habituelle entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

En effet, des nombres « usuellement rationnels » comme $2/3 \sim$ **«31| 4** ou $3/4 \sim$ **«1| 2** par exemple, appartiennent à $\mathbb{Z}_5$.

Mais en base 3, $2/3 \sim 2/10$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}_3$, et en base 2, $3/4 \sim 11/100$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}_2$.

Cependant, on sait, par construction, que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ et que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ quel que soit p.

En fait, visuellement, seuls les nombres à virgule n'appartiennent pas à $\mathbb{Z}_p$. Ce qui nous donne une définition (qui n'en est pas une) de $\mathbb{Q}_p$: pour p fixé,

$\mathbb{Q}_p$ est l'ensemble des nombres p-adiques avec ou sans virgule

Cet ensemble est beaucoup plus vaste que l'ensemble des nombres rationnels auquel nous nous sommes limités dans ce fichier. Nous verrons cela dans la suite de ce travail.

Conclusion

Cette approche ludique est aussi logique ou intuitive que possible, mais pas forcément rigoureuse selon les canons habituels des mathématiques. Elle fournit cependant des résultats parfaitement corrects. Elle a également le mérite de familiariser le lecteur avec cette représentation tout à fait inhabituelle des nombres rationnels. Dans les présentations « sérieuses », on parle beaucoup des nombres p-adiques, mais on n'en voit jamais. Ces quelques pages n'avaient pour autre ambition que de montrer comment en construire quelques-uns « à la main ».

Ceci étant, on ne voit pas bien l'utilité ou les applications possibles d'une telle représentation, si ce n'est la disparition du signe « moins », ce qui constitue un progrès bien mince.

Toutefois, les applications des nombres p-adiques, considérables en arithmétique, sont d'une approche abstraite et difficile.

Si l'aventure vous intéresse, je tente de vous emmener un peu plus loin dans les fichiers « Puissance fractionnaire p-adique » et « Exponentielle et Logarithme p-adiques ». Mais ça devient un peu laborieux pour moi, néophyte en cette matière…