JUSTESSE

Résumé

On définit la fausseté d'une quinte et d'une tierce ainsi que la moyenne quadratique d'un ensemble de fausseté.

Introduction

Je chante dans une chorale et ma chef de chœur m'a dit un jour : « la gamme tempérée est la plus fausse ». Affirmation péremptoire et qui a entrainé de ma part quelques réflexions. Fausse par rapport à quoi ? Est-il question de la fausseté des notes, des quintes, des tierces ? Si elle est plus fausse que les autres gammes, comment peut-on quantifier la fausseté ? Je propose une réponse à ces questions dans les lignes ci-dessous.

On admet que, pour des raisons physiques et physiologiques, les seuls intervalles **justes** sont ceux pour lesquels le rapport des fréquences des notes extrêmes est une fraction rationnelle (voir « A1 Harmoniques ».

Les personnes allergiques aux formules sont invitées à passer directement au dernier paragraphe.

Justesse d'une quinte et d'une tierce

La quinte Q est à comparer à la quinte juste Qj = $\log_2(3/2)$ et la tierce T est à comparer à la tierce juste Tj = $\log_2(5/4)$.

On montre par ailleurs que Tj = 4Qj – 2 – Cs où Cs est le comma syntonique.

Dans la construction de notes par réduction d'un ensemble de quintes (voir « Gammes diatoniques »), une tierce est une succession de 4 quintes, diminuée de 2 octaves.

On numérote les quintes dans l'ordre croissant et on donne à une tierce T le numéro de la première quinte qui intervient dans son calcul :

$$T_k = -2 + \sum_{i=0}^{3} Q_{k+i}$$

Il est plus simple de définir la **fausseté** d'une quinte ou d'une tierce que sa justesse.

La fausseté de la quinte Q_k est $|Q_k - Qj|$ et celle de la tierce T_k est $|T_k - (4Qj - 2 - Cs)|$.

Quelques manipulations algébriques s'imposent dès maintenant pour alléger la deuxième expression.

On pose $X_k = Q_k - Qj$.

La fausseté de la quinte Q_k est donc $|X_k|$ et celle de la tierce T_k est :

$$Y_k = \left| Cs + \sum_{i=0}^{3} X_{k+i} \right|$$

Justesse d'un ensemble de quintes et de tierces

Pour calculer la justesse moyenne d'un ensemble de n quintes ayant la même importance musicale, on abandonne les valeurs absolues qui sont difficilement manipulables et on calcule la **fausseté quadratique moyenne**.

$$f_Q{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

De même, la moyenne quadratique de la fausseté de n tierces ayant la même importance musicale est donnée par :

$$f_T{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k^2$$

A partir de ces principes de base, on peut éventuellement pondérer certaines faussetés (coefficient a_k) pour tenir compte de l'importance musicale des intervalles correspondants.

La fausseté quadratique moyenne de cet ensemble de faussetés est alors donnée naturellement par :

$$f^2 = \frac{\sum a_k f_k^2}{\sum a_k}$$

Ces définitions de moyenne quadratique et de moyenne pondérée sont classiques en mathématiques.

Justesse d'une gamme

On arrive ici à une question beaucoup plus délicate. On peut voir dans « 2 Gammes diatoniques », « 3 Tonalités » et « 4 Gammes chromatiques » qu'il existe différentes techniques de construction d'une gamme, toutes basées sur la réduction d'un ensemble de quintes.

Par ailleurs, les seules faussetés que l'on sait définir (voir ci-dessus) sont celles des quintes, des tierces, et d'un ensemble (éventuellement pondéré) de quintes et de tierces.

Il me semble illusoire de chercher à définir la justesse d'une gamme à partir de la justesse des quintes et des tierces que l'on y trouve car la pondération à utiliser dépend de la sensibilité musicale de chacun et des intervalles utilisés dans les morceaux interprétés.

Cependant, on montre dans le fichier « 4 Gammes chromatiques », que, parmi les gammes chromatiques mésotoniques, celle dont la fausseté est la plus petite (sous certaines conditions) est précisément la gamme tempérée.

Ma chef de chœur avait donc parlé sans savoir !