DES QUINTES EN QUANTITÉ

Résumé

Nous montrons ici deux méthodes mathématiques permettant de fabriquer des intervalles de quinte (fausse) égaux à une fraction rationnelle d'octave et utiles aux musiciens.

Intérêt des fractions rationnelles

L'approximation de la quinte juste Qj par une fraction rationnelle[1] Q permet d'avoir une relation du type n Q = p Oct : un nombre entier de quintes est égal à un nombre entier d'octaves. Il en a été fait usage dans « Gammes par division multiple ».

Dans ce chapitre, nous nous contentons de mettre en œuvre deux techniques fournissant des approximations de la quinte juste par une fraction rationnelle.

Approximations de la quinte juste utilisant les fractions continues

On montre que tout nombre réel R peut s'écrire sous la forme : $\mathrm{R} = \mathrm{n}_1 + \frac{1}{\mathrm{n}_2 + \frac{1}{\mathrm{n}_3 + \frac{1}{\mathrm{n}_4 + \cdots}}}$ où n_1, n_2, n_3, n_4… sont des nombres entiers.

Cette opération s'appelle le développement en fractions continues du nombre R.

Le nombre réel qui nous intéresse en musique est Qj = $\log_2(3/2)$.

Les nombres entiers n_1, n_2… se déterminent en utilisant la fonction « Partie entière » d'un nombre. Tous les calculs effectués dans ce travail ont été réalisés simplement avec un tableur.

On appelle Q_i la fraction rationnelle obtenue quand on arrête le développement au terme n_i.

Les nombres rationnels Q_i constituent des approximations de plus en plus précises qui encadrent la quinte juste Qj.

Les premières valeurs de Q_i sont données ci-dessous (en octaves) :

$Q_1 = 1$, $Q_2 = 1/2$, $Q_3 = 3/5$, $Q_4 = 7/12$, $Q_5 = 24/41$, $Q_6 = 31/53$, $Q_7 = 179/306$ …

Q_1, Q_2 et Q_3 n'ont aucun intérêt musical.

Q_4 est la quinte tempérée (Qt = 7/12 Oct = 3,5 Tons).

Q_5 n'a pas eu d'avenir musical car elle est supérieure à Qj et aggrave encore la fausseté des tierces.

Q_6 est la quinte de Holder-Mercator (Qh).

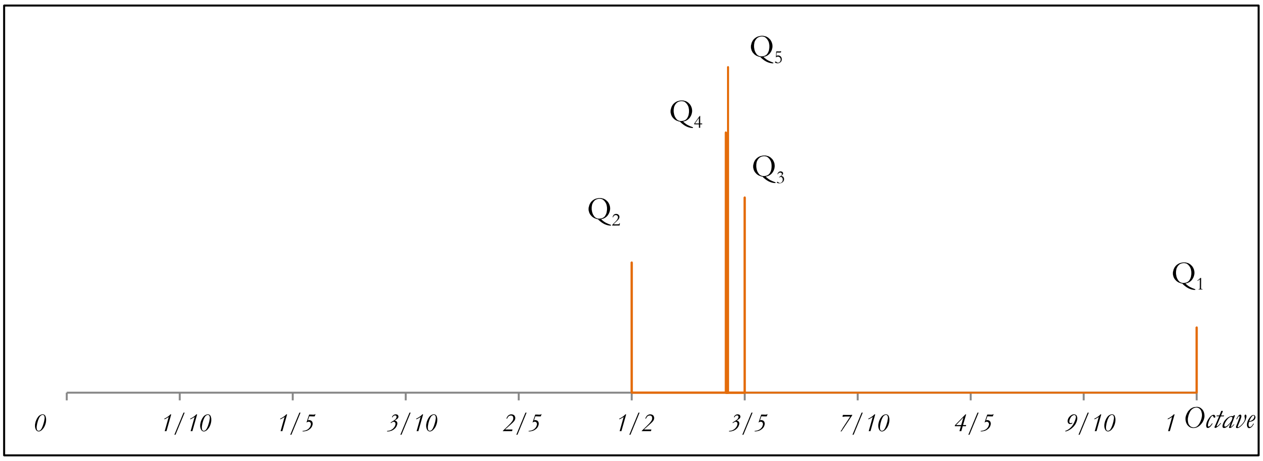
Cette quinte est à la base de la gamme de Holder-Mercator qui présente un intérêt historique et pédagogique développé dans « Gammes chromatiques ».

Q_7 et les suivantes n'ont pas été utilisées car elles sont vraiment très proche de Qj (Q_7 = 0,5849673 Oct et Qj = 0,5849625 Oct).

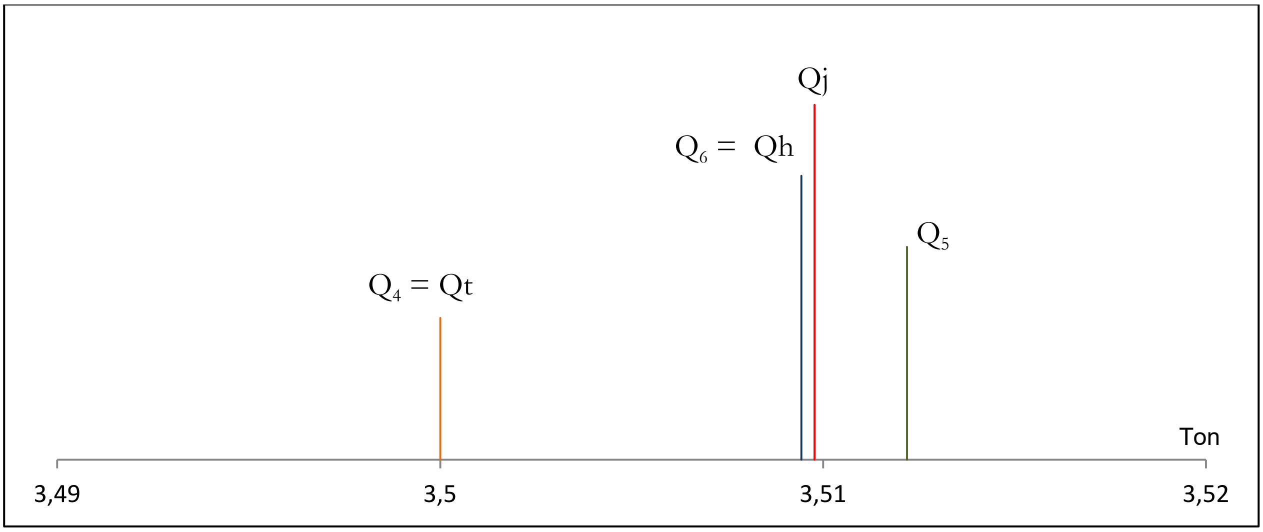
---

[1] On rappelle aux lecteurs peu familiers des mathématiques qu'une fraction rationnelle est le rapport entre deux nombres entiers.

Les figures ci-dessous montrent l'encadrement de plus en plus serré de Qj.



Agrandissons la partie centrale.
Attention à l'unité utilisée qui passe de l'Octave au Ton.



Q_7 est invisible à cause de sa proximité trop serrée avec Qj

Méthode des tons et demi-tons

Une autre méthode utile en musique est de chercher des quintes voisines de Qj, de la forme $Q = \frac{3t+d}{5t+2d}$ où t et d sont deux nombres entiers premiers entre eux et tels que $\frac{3}{2} \leq \frac{t}{d} \leq \frac{5}{2}$.

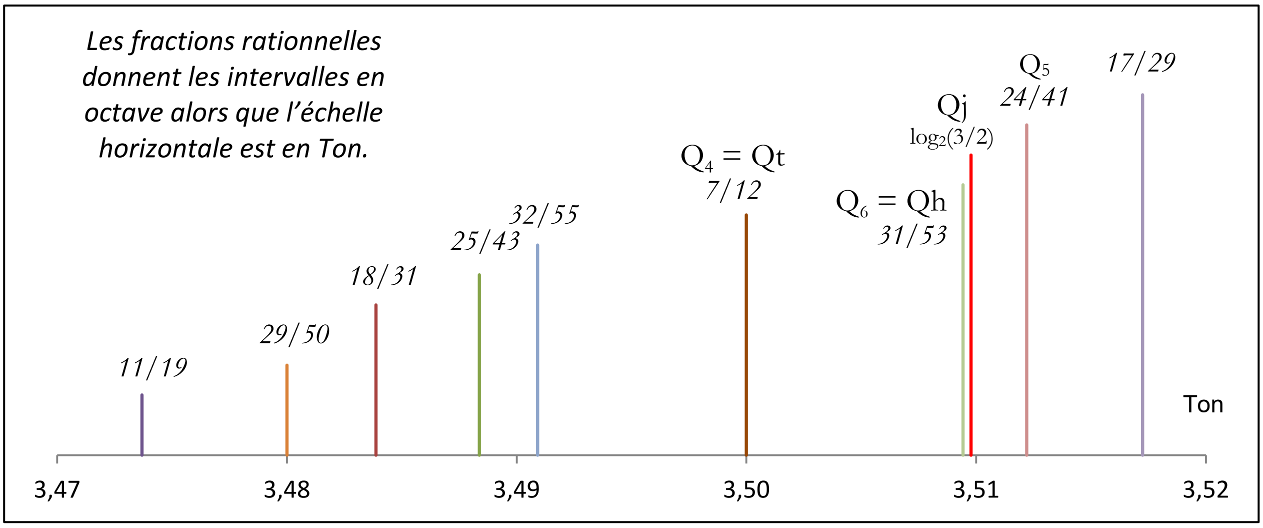
On comprend mieux cette formule cabalistique quand on traduit « t » par ton et « d » par demi-ton. Mais on remarque également que, sauf cas très particulier, le demi-ton n'est pas égal à la moitié d'un ton !

Le détail des calculs n'ayant aucun intérêt, on donne les résultats obtenus en se limitant à t < 10.

t	2	3	5	5	7	7	8	9	9
d	1	2	2	3	3	4	5	4	5
$Q = \dfrac{3t+d}{5t+2d}$	*7/12*	*11/19*	*17/29*	*18/31*	*24/41*	*25/43*	*29/50*	*31/53*	*32/55*

Les valeurs 7/12, 24/41 et 31/53 on déjà été rencontrées dans le développement en fractions continues.

Sur le graphe ci-dessous, on a ajouté Qj qui n’est pas une fraction rationnelle.



Conclusion

On peut évidemment imaginer d’autres techniques d’approximation d’une quinte juste par une fraction rationnelle, mais celles que nous avons montrées dans ce chapitre sont les seules à avoir eu des applications concrètes en musique.

Nous retiendrons que les quintes (fausses) utiles au musicien ont des valeurs approximativement comprises entre 3,47 et 3,52 Tons.